UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

ANDRÉ LUIZ CANDIANI

CORRIDA DAS FUNÇÕES: UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS.

ALFENAS MG

2026

ANDRÉ LUIZ CANDIANI

CORRIDA DAS FUNÇÕES: UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS.

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Alfenas, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: José Claudinei Ferreira
Coorientadora: Ana Del Valle Duarte Castillo.

ALFENAS MG

2026

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca Central

Candiani, André Luiz.
Corrida das Funções : Uma estratégia lúdica para o ensino de funções / André Luiz Candiani. - Alfenas, MG, 2026.
85 f. : il. -

Orientador(a): José Claudinei Ferreira.
Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Alfenas, Alfenas, MG, 2026.
Bibliografia.

1. Ensino Médio. 2. Matemática. 3. Funções. 4. Educação Matemática. 5. Jogo de Matemática. I. Ferreira, José Claudinei, orient. II. Título.

Ficha gerada automaticamente com dados fornecidos pelo autor.

ANDRÉ LUIZ CANDIANI

CORRIDA DAS FUNÇÕES: UMA ESTRATÉGIA LÚDICA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS

O Presidente da banca examinadora abaixo assina a aprovação da Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas.

Área de concentração: (51) Ciências e Humanidades para a Educação Básica

Aprovada em: 13 de março de 2026.

Prof. Dr. José Claudinei Ferreira

Presidente da Banca Examinadora

Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Profa. Dra. Maria do Carmo de Sousa

Instituição: Universidade Federal de São Carlos

Profa. Dra. Cátia Regina de Oliveira Quilles Queiroz

Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Dedico este trabalho ao meu irmão. Onde quer que você esteja, saiba que essa vitória tem seu nome. E que tudo o que eu conquistar daqui em diante sempre terá um pedaço de você. Com amor eterno.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sabedoria e força para continuar. Esta dissertação carrega páginas escritas com estudo, esforço e persistência mas também carrega lágrimas.

Ao meu irmão, que não está mais aqui para segurar este trabalho nas mãos, mas que esteve presente em cada passo dessa caminhada. Você acreditou em mim quando eu duvidei, me levantou quando o cansaço pesou e nunca permitiu que eu desistisse dos meus sonhos. Foram tantas conversas, tantos incentivos silenciosos, tantas palavras simples que tinham o poder de me fortalecer. Você enxergava em mim uma capacidade que, às vezes, eu mesmo não conseguia ver. Hoje, tua ausência dói. Dói não poder compartilhar essa conquista, não poder ouvir seu orgulho, não poder agradecer olhando nos seus olhos. Mas, ao mesmo tempo, sinto que cada página escrita tem um pouco da sua força. Se eu cheguei até aqui, foi porque você caminhou comigo.

Aos meus pais, Luciano e Maria, por não medir esforços para ver minha felicidade e abraçar todos os desafios comigo. À minha sobrinha que me acompanhou e auxiliou em todo o desenvolvimento deste trabalho. Aos meus amigos, que para além de entender as minhas ausências mantiveram comigo.

Aos professores que contribuíram para a minha formação no Programa de Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT, expresso minha gratidão pelo conhecimento compartilhado.

Agradeço também à Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG), aos professores José Claudinei Ferreira e Ana Duarte Castillo pela orientação e parceria e às diretoras e supervisoras das Escolas A e B, pela paciência e compreensão durante as intervenções e pelo espaço cedido. Aos alunos, pela motivação, carinho e troca de informações. Sem o apoio de vocês, não haveria trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) **-** Código de Financiamento 001.

"Não sobreveio a vocês tentação que não fosse humana; mas Deus é fiel e não permitirá que vocês sejam tentados além do que podem suportar. Pelo contrário, juntamente com a tentação, proverá livramento, de modo que a possam suportar."

(1 Coríntios 10:13, Bíblia Sagrada, Almeida Revista e Atualizada)

RESUMO

O ensino de funções matemáticas no Ensino Médio, especialmente na rede pública, apresenta desafios recorrentes relacionados à compreensão conceitual, ao engajamento dos estudantes e à atribuição de significado aos conteúdos matemáticos. Nesse contexto, esta dissertação insere-se no debate sobre o uso de jogos como estratégia pedagógica capaz de promover aprendizagens mais significativas. O objetivo do trabalho foi desenvolver, aplicar e refletir sobre o jogo de tabuleiro Corrida das Funções, de autoria própria, como recurso didático para o ensino de funções matemáticas, com foco na resolução de problemas, no pensamento computacional e nas interações sociais em sala de aula. A metodologia adotada é de natureza qualitativa, fundamentada em relatos de experiência do professor-pesquisador, a partir da aplicação do jogo em turmas do 1º ano do Ensino Médio, bem como em atividades envolvendo estudantes do 2º e 3º anos, em duas escolas estaduais de Minas Gerais, ao longo do ano de 2025. As análises consideram observações em sala de aula, registros dos alunos e reflexões docentes, além do diálogo com a literatura da Educação Matemática. Os relatos indicam que o jogo contribuiu para a consolidação de conceitos relacionados a funções e operações matemáticas básicas, favorecendo o engajamento, a motivação, o trabalho em grupo, a cooperação e a inclusão de alunos com diferentes níveis de aprendizagem. Observou-se também maior participação dos estudantes, desenvolvimento de estratégias e fortalecimento do vínculo aluno-professor e aluno-aluno. Como considerações finais, entende-se que o jogo Corrida das Funções configura-se como uma ferramenta pedagógica potente para o Ensino Médio, capaz de aproximar teoria e prática, promover aprendizagens significativas e contribuir para um ensino de Matemática mais dinâmico, colaborativo e inclusivo, alinhado às demandas contemporâneas da educação básica. Espera-se que o jogo seja utilizado por outros(as) professores(as) da rede pública, tornando o ensino de funções mais acessível e compreensível aos estudantes.

Palavras-chave: Ensino Médio. Matemática. Funções. Educação Matemática. Jogo de Matemática.

ABSTRACT

The teaching of mathematical functions in Brazilian high school, especially in public schools, presents recurring challenges related to conceptual understanding, student engagement, and the attribution of meaning to mathematical content. In this context, this dissertation contributes to the debate on the use of games as a pedagogical strategy capable of promoting more meaningful learning. The aim of this study was to develop, implement, and reflect on the board game *Corrida das Funções*, authored by the researcher, as a didactic resource for teaching mathematical functions, with an emphasis on problem solving, computational thinking, and social interactions in the classroom. The methodology adopted is qualitative in nature and is based on experience reports from the teacher-researcher, derived from the application of the game in first-year high school classes, as well as activities involving second and third-year students, in two public state schools in Minas Gerais state, Brazil, throughout the year 2025. The analysis draws on classroom observations, students' written records, and the teacher's reflective notes, in dialogue with the literature in Mathematics Education. The experience reports indicate that the game contributed to the consolidation of concepts related to functions and basic mathematical operations, fostering student engagement, motivation, group work, cooperation, and the inclusion of learners with different levels of achievement. Increased student participation, the development of strategies, and the strengthening of student–teacher and student–student relationships were also observed. As final considerations, it is concluded that the *Corrida das Funções* game constitutes a powerful pedagogical tool to Brazilian high school education, capable of bridging theory and practice, promoting meaningful learning, and contributing to a more dynamic, collaborative, and inclusive approach to Mathematics teaching, aligned with contemporary demands of basic education. It is expected that the game may be adopted by other public school teachers, making the teaching of functions more accessible and comprehensible to students.

Keywords: Brazilian High School Education; Mathematics; Functions; Mathematics Education; Math game.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 Introdução

O ensino de Matemática na educação básica, especialmente na rede pública, enfrenta desafios persistentes relacionados à aprendizagem dos conteúdos e ao engajamento dos estudantes. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), a aprendizagem dessa área deve promover o desenvolvimento de competências que possibilitem ao aluno utilizar conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas para interpretar e resolver situações em diferentes contextos, buscando favorecer o raciocínio lógico, a autonomia intelectual e a tomada de decisões fundamentadas. Essa perspectiva está alinhada ao Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 4 (ODS 4), proposto pela Organização das Nações Unidas (ONU), que estabelece a garantia de uma educação inclusiva, equitativa e de qualidade, com oportunidades de aprendizagem ao longo da vida. Nesse contexto, torna-se necessário repensar práticas pedagógicas tradicionais, frequentemente centradas na exposição do professor e na resolução mecânica de exercícios, e buscar metodologias que tornem o estudante protagonista do processo de aprendizagem.

A experiência profissional do autor como professor de Matemática, acumulada ao longo de aproximadamente vinte anos de atuação, principalmente no Ensino Médio, evidencia que o estudo de funções matemáticas é um dos conteúdos que mais suscita dificuldades de compreensão por parte dos alunos. Observa-se que, mesmo buscando usar recursos tecnológicos e atividades contextualizadas, muitos estudantes apresentam dificuldades em atribuir significado aos conceitos fundamentais envolvidos, como a própria ideia de função e sua interpretação. Esse cenário suscita questionamentos relevantes para a prática docente como por exemplo: as dificuldades decorrem da complexidade do conteúdo ou das abordagens metodológicas predominantes em sala de aula? Considerando a recorrente falta de interesse dos estudantes, quais estratégias podem favorecer o maior envolvimento cognitivo e emocional dos estudantes com o objeto de estudo? Tais perguntas levam a reflexões e motivaram a busca por uma alternativa metodológica que possibilitasse uma abordagem que entendo ser mais concreta, interativa e significativa para o ensino de funções, por meio do uso de um jogo de tabuleiro.

Um episódio vivenciado em sala de aula contribuiu de forma decisiva para essa reflexão. Ao solicitar que os alunos calculassem o valor de uma função para um determinado número, surgiu a pergunta: “O que é f(3)?”. Essa indagação revelou-me que, antes da aplicação de procedimentos algébricos, era necessário construir o significado do conceito de função. A partir dessa constatação, tornou-se evidente a necessidade de uma proposta pedagógica que favoreça a compreensão conceitual de forma integrada à ação.

Nesse contexto, foi desenvolvido o jogo *Corrida das Funções*, um recurso didático que entendo ser original, concebido como produto educacional deste mestrado profissional (Candiani, 2026). O jogo foi elaborado a partir das demandas observadas na prática docente, com o objetivo de apoiar o ensino de funções matemáticas por meio de uma metodologia ativa, na qual o aluno participa de forma direta na resolução de problemas, na tomada de decisões e na aplicação dos conceitos estudados.

Durante a dinâmica do jogo, os estudantes são desafiados a interpretar expressões algébricas, analisar gráficos, calcular valores de funções e utilizar propriedades específicas para avançar no tabuleiro. Cada ação exige a mobilização de conhecimentos matemáticos, permitindo que os alunos experimentem os conceitos de maneira concreta e contextualizada. O caráter lúdico e competitivo do jogo contribui para aumentar o engajamento, favorecendo a concentração, a persistência diante dos desafios e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

O conteúdo abordado contempla funções comumente trabalhadas no Ensino Médio, como função constante, afim, quadrática, exponencial, modular e cúbica, além de conceitos essenciais como domínio, imagem, crescimento e decrescimento. Entendo que ao associar o cálculo de f(x) a ações concretas no jogo, como o avanço de casas no tabuleiro, o conceito de função deixa de ser apenas simbólico e passa a ter significado prático para o estudante. Além disso, o jogo promove a retomada e o fortalecimento de operações matemáticas básicas como soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e regras de sinais, integrando conhecimentos do Ensino Fundamental ao estudo das funções. Dessa forma, o recurso não se limita ao aspecto lúdico, mas configura-se como uma ferramenta pedagógica para articular o conteúdo matemático a estratégia, interação social e tomada de decisões.

Assim, esse trabalho tem como propósito investigar, por meio da prática do docente autor, e refletir sobre as contribuições do jogo *Corrida das Funções* para o ensino e a aprendizagem de funções matemáticas no Ensino Médio, a partir de uma proposta didático-pedagógica aplicada à realidade escolar.

Ao colocar o estudante no centro do processo de aprendizagem, buscamos contribuir para um ensino de Matemática mais significativo, participativo e alinhado às demandas contemporâneas da educação básica, característica fundamental de pesquisas desenvolvidas no âmbito de um mestrado profissional.

Este trabalho é dividido da seguinte forma: No Capítulo 1 revisamos alguns textos sobre o uso de jogos na Educação Matemática. No segundo capítulo, tratamos brevemente do conceito de função e habilidades relacionadas. No Capítulo 3, destacamos as regras oficiais do jogo e como o jogo foi pensado e desenvolvido. No Capítulo 4, são feitos alguns relatos e reflexões sobre o desenvolvimento e uso do jogo dentro da sala de aula. Por fim, no Capítulo 5, estão as considerações e reflexões seguidas de projetos futuros.

2 Sobre o uso de jogos na Educação Matemática

O jogo é formalmente conhecido como uma atividade cuja finalidade é o entretenimento e a diversão. Embora quando é mencionada a palavra jogo, a tendência é relacionar a um conjunto de regras, Pinto (2023) cita que o jogo para crianças entre três e seis anos são formas de suprir a necessidade da participação das relações sociais que norteiam a vida adulta. Para as crianças, o jogo não está intimamente ligado ao conjunto de regras e sim, como Vygotsky (1995) traz à tona, é a imitação daquilo que está exposto no dia a dia, por exemplo: uma brincadeira entre crianças que é comum, é brincar encenando que estão em uma escola, em que uma das crianças exerce o papel do professor e outras crianças o dos alunos. Mesmo que não tenha se estabelecido as regras da brincadeira, pela repetição, a criança que está atuando como professor ficará de pé e os representantes dos alunos sentados voltados para o professor. A atividade acontece fazendo com que a estrutura criada pelas crianças seja um jogo que não foi preestabelecido regras.

Em contrapartida, desde a infância somos apresentados a pequenos jogos como "*Jokenpô*", "Pedra, papel, tesoura", "par ou ímpar", entre outras brincadeiras, que tem regras bem definidas e estão relacionados ao azar e prioridades de escolhas.

Na situação anterior pode-se notar que as crianças organizam-se repetindo o que é conhecido, fazendo com que o aprendizado seja uma encenação do que é assistido. O ato de se imaginar fazendo algo do cotidiano, são decisões e estratégias que podem ser caracterizadas como uma brincadeira de otimização. Segundo Vygotsky (1995), o jogo é uma atividade social e simbólica que possibilita o desenvolvimento de funções psicológicas superiores, pois cria uma zona de desenvolvimento proximal em que o aluno aprende com o outro e pelo outro, incitando que em cada etapa da vida, há um limite superior de aprendizagem em um processo educativo. De acordo com Junior (2015) a zona de desenvolvimento proximal diz sobre tudo aquilo que o humano não consegue realizar sozinho, mas que terá êxito com o auxílio de um sujeito que saiba fazer.

Considerando que o jogo é uma tomada de decisões e escolhas, pautadas naquilo que já é conhecido e repetido, mesmo na vida adulta, diariamente existem muitas situações que podem ser encaradas como um jogo ou uma brincadeira. Um exemplo é o caminho que deve percorrer de casa até o trabalho utilizando um veículo. Suponha, que há três caminhos para chegar até o seu trabalho. Um deles tem que passar por três semáforos, o outro tem somente um semáforo, mas tem que passar em frente a um hospital que costuma ter muitos carros e o terceiro caminho tem cinco semáforos, além de vários outros itens que tem em mente instantaneamente. Ao sair de casa, você terá que escolher qual dos três caminhos deve percorrer e a vitória ou a consequência dessa simulação mental breve é a chegada mais rápida ao ponto de interesse. Note ainda que neste pensamento, poderá ou não usar o *GPS,* para ajudar na tomada de decisão ou arriscar em uma das alternativas, considerando suas impressões, encarando como a resolução de um problema que se tem todos os dias de trabalho.

O termo “resolução de problemas”, empregado na situação anterior, é amplamente recorrente na literatura, por se constituir como uma metodologia de ensino e também como uma habilidade explicitamente prevista na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Compreende-se que a consolidação desse termo no campo da Matemática e da Educação Matemática tem como marco os estudos de Polya, publicados na década de 1940, que concebem a resolução de problemas como um processo estruturado em diferentes etapas. Nesse processo, há uma alternância entre momentos de mediação e orientação por parte do professor e momentos de atuação autônoma do estudante, que é incentivado a formular, a analisar e a testar diferentes estratégias para a solução da situação proposta (Polya, 1995). No Brasil, a resolução e a proposição de problemas como metodologia de ensino e de aprendizagem de matemática teve muitas contribuições de Onuchic (ver (Junior, 2015) e referências).

Ao citar o termo de resolução de problemas isso também é facilmente encaixado em uma situação do cotidiano. É possível enxergar Matemática e jogos bem em situações simples de tomada de decisões até problemas mais complexos.

Consideramos que você irá fazer uma receita de bolo para o café da tarde. Primeiramente, irá analisar quais são todos os ingredientes necessários para realizar a receita, organizá-los de forma que fique mais perto e fácil a visualização. Visto que possui todos os ingredientes, poderá começar a realizar as etapas de uma receita, que geralmente, são as regras deste jogo. Vamos supor que chegou o momento de adicionar a farinha de trigo e você percebe que não está na consistência que deveria ficar e vai impactar no resultado final. Ao perceber que precisa de mais farinha, automaticamente, você vai adicionar. Não importa se a quantidade exata já tenha sido colocada. É uma forma de resolver um problema sem que esteja percebendo que estabeleceu uma estratégia e já colocou em prática, utilizando Matemática. Nessa mesma situação, pense que a consistência não foi atingida, porém, acabou a farinha de trigo da sua casa. Utilizando o instinto, começará a pensar em substituições equivalentes para que não perca o restante dos ingredientes que já foram incorporados. Mas, ao mesmo tempo, outra pessoa pode oferecer como solução pedir uma farinha de trigo em um aplicativo que faz entregas de supermercado. É o delineamento de uma resolução de problemas. No primeiro momento, foi apresentado o problema: a falta de farinha de trigo para atingir a consistência de um bolo. As possíveis soluções deste problema, cabe a pessoa e as vivências que ela traz pro problema. A solução esperada é que se tenha um bolo fofinho mesmo com a falta total do ingrediente. A vitória do jogo consiste em superar o problema e atingir um bom resultado. Perceba que há a expectativa se dará certo ou não e também a comunicação dos resultados, tornando uma experiência. Supondo que a solução foi trocar a farinha de trigo por uma farinha de aveia e que ao final, o bolo tenha ficado fofinho. Além de resolver o problema, cria-se um novo conceito. Será que é possível, em outro momento, fazer um bolo utilizando farinha de aveia? Quais são os ganhos nutritivos? Adicionando um campo de aprendizado através de uma estratégia criada a fim de resolver um percalço.

Além disso, a resolução de problemas aparece de forma central na definição de letramento matemático apresentada na BNCC, entendido como o conjunto de competências e habilidades relacionadas a raciocinar, a representar, a comunicar e a argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, bem como a formulação e a resolução de problemas em uma diversidade de contextos. Esse processo envolve o uso de conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas, assegurando que os estudantes reconheçam a Matemática como um conhecimento fundamental para compreender e intervir no mundo. Ademais, a BNCC destaca o caráter da Matemática como um jogo intelectual, aspecto que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode, ainda, proporcionar fruição e prazer no processo de aprendizagem (Brasil, 2018, p.522).

Em todas essas situações citadas como exemplos, é possível salientar levantamentos importantes na Matemática, além do conceito explícito de tomada de decisões. Por exemplo, quando estou escolhendo qual caminho percorrer, dentre as situações poderiam, considerar a distância e ignorar todas as situações. Deixar somente que a comparação do módulo dos números da distância decida o caminho em que eu deveria seguir para chegar ao meu trabalho, desconsiderando a medida do tempo. Na sala de aula, ocorrerá o mesmo, cabendo ao professor aproveitar as situações em que há um conteúdo matemático implícito e fazendo considerações, mediando o conhecimento que algum aluno talvez não tenha enxergado. Grando (2015) menciona sobre a importância desde o registro em desenho até a distribuição dos grupos, trabalhando sutilmente com divisões e esboços, utilizando a linguagem numérica em vários processos durante o jogo até mesmo para contagem de vitórias e derrotas.

Particularmente, como professor da rede estadual de ensino, nos dias de muitas aulas seguidas, é preciso que escolha estratégias para que as todas as aulas não fiquem iguais e automáticas exigindo ainda mais do professor e tirando o protagonismo do aluno. Para isso, é preciso que haja planejamento em que em algumas turmas, será explorado mais o conteúdo, em outras resolução de exercícios e também a alternativa de brincadeiras e aulas mais lúdicas de acordo com o conteúdo. Novamente, ideias práticas consistem em um jogo lógico e racional visando o ganho, nesta situação, de um dia de aulas mais tranquilo.

Na mesma intensidade em que na vida adulta resolvemos pequenos e grandes problemas de forma lógica e racional, utilizando ou não, estratégias matemáticas, Grando (2015) reforça que em qualquer idade precisamos de atividades lúdicas para o entretenimento, sendo identificadas em vários momentos do dia a dia, como: ouvindo música, distraindo o bicho de estimação, pisando somente nas linhas das calçadas ou sacudindo a perna no ritmo de um barulho da natureza, são propostas de jogos consigo mesmo de atitude livre.

Contudo, a palavra "jogo" aparece em três contextos na BNCC, no eixo de Educação Física, como uma parte do conteúdo prático a ser seguido e outras partes em um sentido conotativo do que "está em jogo", ou seja, como forma de um objetivo final. A habilidade em que aparece a palavra jogo é dada por:

> (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões (Brasil, 2018, p. 526)

Embora na BNCC não esteja relacionado ao conteúdo de funções, que é o foco deste trabalho, o uso do jogo como recurso pedagógico é capaz de promover motivação e engajamento do pensamento crítico de forma divertida, corroborando com o intuito de entreterimento do jogo. Grando (2015) cita que o jogo propicia o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas possibilitando que os alunos investiguem, problematizam e elaborem estratégias, tornando o aluno protagonista, pois há interação de ambos os lados, tanto do aluno quanto do professor fazendo com que as aulas fiquem mútua e participativa.

Neste sentido, Ferreira e Sant'ana (2025), ao relatarem um minicurso com jogos digitais no Scratch, destacam que práticas lúdicas potencializam a aprendizagem significativa e estimulam os professores a diversificar metodologias.

A experiência com o jogo *Corrida das Funções* dialoga diretamente com essa visão, ao propor uma alternativa que alia ludicidade e rigor conceitual. No ensino da Matemática, o uso do jogo constitui uma estratégia didática fundamental para promover o envolvimento e a aprendizagem ativa dos estudantes. Grando (2004) deixa claro a importância de trabalhar em sala de aula em grupos, pois auxilia no desenvolvimento da aprendizagem. Ao jogar, o aluno é convidado a explorar situações-problema, formular hipóteses e buscar soluções, tornando-se protagonista do seu processo de aprendizagem.

Na mesma direção, Grando (2015) ressalta que o jogo educativo favorece a formação simbólica e cognitiva do sujeito, pois o ato de jogar envolve imitação, representação e reflexão, elementos essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático. Assim, o jogo, ao mesmo tempo em que diverte, ensina: ele estimula a curiosidade, o raciocínio lógico, a cooperação e o cumprimento de regras, promovendo a socialização e o respeito mútuo. Pesquisas como a de Strapason e Bisognin (2019) confirmam que o uso de jogos no ensino de funções contribui para uma aprendizagem mais significativa e motivadora, auxiliando o aluno a compreender conceitos abstratos de maneira concreta e prazerosa.

Ainda, Grando (2009) salienta que ao trabalhar com jogos no ensino de Matemática há vantagens, como: participação ativa do aluno na construção do conhecimento, interação social e conscientização do trabalho em grupo.

Em um paradoxo, ao mesmo tempo que muito se discute a liberdade de se trabalhar jogos na Educação Matemática como forma de estabelecer estratégias, criar novos conceitos, inovar na forma de resolver problemas, tanto dentro do jogo, como no dia a dia, no contexto de sala de aula, é preciso que o jogo esteja em um contexto organizado e coeso para o momento. Como cita Dalarmi (2013), o ato de jogar quando há planejamento pode oferecer significado ao conhecimento. Assim, fazendo alusão que é uma forma de diversificação de metodologia e não a adoção de uma nova metodologia.

Todavia, o jogo apesar de ser uma ferramenta eficaz no ensino de Matemática, também há as desvantagens do uso em sala de aula, como cita Dalarmi (2013) que mesmo que o jogo seja espontâneo nas pessoas e que contribua significativamente para a cognição de conteúdos em Matemática, não significa que o professor não terá maior tempo de preparação das aulas e trabalho ativo ao organizar tanto as atividades quanto a disciplina dos alunos durante as intervenções durante as aulas utilizando os jogos. Grando (2009) também alerta sobre as suas desvantagens, como: quando os jogos são mal utilizados, existe a chance dos alunos se motivarem mas não saberem porque jogam e a coerção do professor que implica na interferência constante do mediador fazendo "perder a ludicidade".

Com o intuito de amenizar o problema de que o jogo aplicado, seja somente um "passatempo" sem valor para o conteúdo e para a trajetória de conhecimento do ponto de vista metodológico, Grando (2015) cita que é importante garantir que ao escolher o material concreto e possivelmente didático, que tenha o conhecimento quanto às limitações e possibilidades de abordagens, sem a pretensão de acreditar que o seu uso seja suficiente para a compreensão, pelo aluno, de um determinado conceito. Essa compreensão implica que é preciso organizar, planejar e criar situações para que não fujam do controle do pensamento central do material.

Com isso, é preciso que além da organização e ambientação para o jogo dentro de sala de aula, os alunos precisam ter previsões do que vai acontecer adiante, cabendo ao professor explicar passo a passo do jogo e o que é esperado de cada aluno, independente da estratégia utilizada durante a brincadeira. Para isso, Grando (2015) explica através de um exemplo a importância de orientar os estudantes ao registro dos jogos, do pensamento matemático envolvido em cada estratégia. O registro de soluções foi um dos produtos utilizados neste trabalho, para que houvesse mais de um tipo de metodologia durante as intervenções.

3 O conceito de função e habilidades relacionadas

Para este capítulo as referências principais são os livros didáticos Steigenberger (2020), Bonjorno (2020a) e Bonjorno (2020b) que são edições atuais de livros didáticos adotados pela escola onde ocorreram as intervenções pedagógicas. A BNCC (Brasil, 2018) também tem influência na apresentação dos temas.

O conceito de função matemática está presente no cotidiano não só escolar, mesmo que não tenha sistematização matemática envolvida. Ainda, segundo o dicionário Houaiss (2001) a etimologia da palavra função vem do latim em que "functio" significa "execução", "realização" que é derivada do verbo "fungere" que é realizar, executar. Dessa forma, a palavra função tem diversos significados aplicados em diferentes áreas de conhecimento. Para esse trabalho, é importante salientar a definição de função como uma relação entre dois conjuntos que abrange todos os elementos do primeiro e associa a cada elemento deste primeiro conjunto somente a um elemento do segundo.

O conceito de função foi desenvolvido ao longo da história da Matemática, com contribuições de vários matemáticos. Por exemplo, Gottfried Leibniz (1646-1716)[1] foi um dos inventores da calculadora mecânica, que pode ser vista como uma função que associa as entradas numéricas a um único número após a operação selecionada. Leonhard Euler (1707–1783) foi um dos primeiros a usar o termo função de forma sistemática na matemática, associando variáveis por meio de expressões analíticas. No século XIX, matemáticos como Joseph Fourier e Augustin-Louis Cauchy ampliaram o conceito, tratando funções mais gerais e contínuas. Karl Weierstrass (1815–1897) reforçou a definição moderna, estabelecendo que uma função é uma relação entre dois conjuntos em que cada elemento do domínio está associado a exatamente um elemento do contradomínio (EVES, 2004; BOURBARKI, 1994).

Aqui neste texto optamos por apresentar o conceito de função de forma menos formal que a de um livro acadêmico de matemática. Alguns conceitos são apresentados em forma de exemplos, procurando situações comuns no cotidiano das pessoas que são também uma forma de motivação para o estudo desses conceitos. Como entendemos que o uso de gráficos é bastante útil para o conceito de funções que surgem no Ensino Médio, buscamos apresentar

[1]Muitas coisas no desenvolvimento de calculadoras mecânicas, e depois eletrônicas, deram origem ao que conhecemos hoje como computação, principalmente depois do trabalho de **Charles Babbage e Ada Lovelace** e podem ser relacionadas ao que conhecemos hoje como pensamento computacional. Veja este link para algumas informações históricas sobre calculadoras mecânicas.

links para comandos, para manipular e visualizar gráficos de funções por meio do software Geogebra[2].

Exemplo número 1: O fato cotidiano de ir à feira e comprar bananas por dúzias pode ser associado ao conceito de função matemática. Nesta situação, podemos ver duas grandezas envolvidas: o preço que será pago e as unidades de dúzias de bananas que o comprador deseja adquirir. Considerando que cada dúzia de bananas custe R$9,00, se o comprador desejar levar o números de bananas que são múltiplos de 12, como, 24, 36 e 48 bananas, automaticamente o vendedor e comprador farão as contas de dobro, triplo e quádruplo, respectivamente, R$18,00, R$27,00, R$36,00, para encontrar o preço da compra. Estabelecendo, uma relação entre o número de dúzias de bananas e o preço a ser pago, que são diretamente proporcionais, ou seja, quanto mais dúzias de bananas o comprador decidir levar para casa, maior será o preço que custará. Se, por outro lado, o comprador decidir levar para casa 15 bananas é preciso estabelecer o preço por unidade de bananas e depois a multiplicação pela quantidade que será comprada, envolvendo mais um conceito matemático, de razão entre preço da compra e as unidades de banana. Ainda, estará trabalhando com funções afim em que relaciona-se duas unidades de medida, com a lei de formação $P(d) = 9d$ tal que $P(d)$ é o preço a ser pago e d quantidade de dúzias de bananas ou ainda, a função $Q(b) = 0,75b$ que é o preço relacionado a quantidade unitária de bananas denotada por b. A relação de dependência está envolvida em todo o processo de compra de bananas, desde a informação do preço pelo feirante até o poder de decisão de quantas bananas o consumidor vai querer, precisar ou poder comprar. Isso determina a dependência e independência das variáveis, pois neste caso, só é possível calcular o preço final de compra quando é informado a quantidade de bananas (ou de dúzias) que quer, ou seja, o preço depende da quantidade de bananas.

Bonjorno (2020) denota que a ideia de função na matemática vem de situações em que diferentes grandezas estão associadas por uma relação de dependência. Na situação do Exemplo 1 citada anteriormente, o valor a ser pago depende da quantidade de bananas. Também há outros exemplos comuns, como: o preço da conta de luz depende de quanto de energia elétrica foi utilizada, o lucro em um *show* pago depende da quantidade de ingressos vendidos ou os exemplos em que as variáveis mantém a proporção porém quanto maior uma

[2] O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, gratuito e de código aberto, que une Geometria e Álgebra (GEO-GEBRA) em uma única interface intuitiva, permitindo construir, visualizar e manipular objetos matemáticos como pontos, gráficos e funções de forma interativa, abrangendo geometria, álgebra, planilhas, estatística e cálculo para todos os níveis de ensino, tornando a matemática mais visual e exploratória (Hohenwarter, Hohenwarter, 2025). O software está disponível online em https://www.geogebra.org/.

das grandezas, menor a outra, como no caso da velocidade em que um carro percorre determinada distância influencia no tempo de chegada, quanto mais veloz, menos tempo gasto no trajeto.

O Exemplo 1 é uma situação recorrente e que pode ser aplicada a diferentes produtos alimentícios e comerciais. Esta forma de definir função através de um exemplo que todos estão expostos aproxima o aluno da aula e motiva pelo fato que facilmente alguém já viveu e tenha alguma experiência para relatar para turma.

Estes exemplos deixam claro a necessidade de um cidadão ter certas habilidades previstas na BNCC, uma delas sendo:

> (EM13MAT405) Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento (Brasil, 2018, p.531).

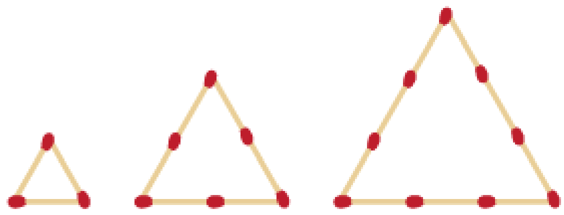
Esta habilidade da BNCC traz uma importante discussão, acerca dos exemplos citados. *Exemplo 2:* Supondo que o exemplo de função tenha relação com a venda de chaveiros e que o preço de compra esteja relacionado com a quantidade de unidades vendidas. Se cada chaveiro custa R$6,50, é possível que compre dois, três ou quatro chaveiros e o preço de compra será o dobro, o triplo, ou o quádruplo do preço de um chaveiro. Seguindo o mesmo pensamento das dúzias de bananas da feira do Exemplo 1. Cabe notar aqui que não é possível (ou que não faz muito sentido) que compre metade de um chaveiro ou outros números não inteiros, fazendo-se necessário identificar os domínios de validade, ou para quais valores, a expressão de uma função matemática faz sentido prático ou tem validade.

Retornando ao Exemplo 1, é possível comprar metade de uma dúzia de bananas, a terça parte de uma dúzia de bananas, entretanto, improvável comprar $\frac{1}{3}$ de uma única banana ou $\frac{1}{5}$ de uma dúzia de bananas.

O Exemplo 2 caberá diferentes discussões do que é possível comprar metade ou a terça parte, como uma melancia. E ainda, prepara para exemplos comuns que aparecem no livro didático como pode ser visto no Exemplo 3, que embora seja um material concreto prático de levar para sala de aula, está inserido em um contexto hipotético.

Exemplo 3: Uma outra situação sobre poder ou não utilizar os números não naturais é abordada em um problema sobre conjuntos e funções (Bonjorno, 2020, p.70) que adaptamos aqui. Observe a sequência de triângulos cujos os lados são formados por palitos de fósforos, conforme Figura 1.

Figura 1- Triângulos construídos com palitos.



Fonte: Bonjorno, 2020, p.70.

Neste exemplo, no contexto de sala de aula, é um problema de fácil reprodução com o material utilizado, os fósforos. O enunciado do problema contém quatro itens nomeados de *a* a *d*, sendo eles: a) Reproduza a tabela (conforme Figura 2) em seu caderno e complete-a com os valores que faltam.

Figura 2- Enunciado de problema.

Número de palitos em cada lado	1	2	3	4	5	6
Total de palitos em cada triângulo	3	6				

Fonte: Bonjorno, 2020, p.70.

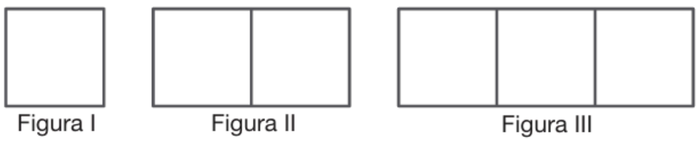
b) Considere x o número de palitos em cada lado e y o total de palitos em cada triângulo para escrever uma sentença matemática que expresse y em função de x. c) Descreva o domínio da função e a imagem. d) Qual a quantidade de palitos que deve ter cada lado para se construir um triângulo com 45 palitos? Nesse problema pode ser trabalhado o padrão que segue na quantidade de palitos de uma figura para outra, que possui uma lei de formação que relaciona o número de palitos em cada lado do triângulo com a quantidade total de palitos. Esperamos que o discente perceba ao preencher a tabela que o número de palitos de cada lado triplica para encontrar o total de palitos em cada triângulo, relacionando assim, em b), que $y = 3x$. Em c), quando pergunta-se o domínio, significa quais números podem ocupar o valor de x na relação, já para a imagem o interesse é em quais quantidades de palitos são necessários para construção dos triângulos, ou seja, quais são os valores possíveis de y. A indagação maior neste caso, é que o domínio só poderá conter números naturais devido a impossibilidade de ter outro tipo de número relacionado a quantidade de palitos nos lados dos triângulos; por exemplo, não podemos incluir todos os números racionais, uma vez que o problema não considera palitos partidos. Nesse caso, a relação que surge do número de palitos em cada triângulo é chamada de sequência numérica, porque o domínio é o conjunto dos números naturais. A associação entre uma sequência numérica e uma função também é uma das habilidades previstas da BNCC em que diz:

> (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (Brasil,2018, p. 533)

Problemas deste tipo são comuns, como no caso do exemplo que segue.

Exemplo 4: o problema 5 proposto na página 25 no material de Steigenberger (2020) extraído do ENEM-MEC 2010, é adaptado aqui como segue: Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerantes para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir, conforme a Figura 3.

Figura 3- Retângulos representando canudos



Fonte: Steigenberger, 2020, p.25

Neste problema, a pergunta é: Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura? As alternativas propostas são:

a) $C = 4Q$;

b) $C = 3Q + 1$;

d) $C = Q + 3$;

e) $C = 4Q - 2$.

Cabe ressaltar neste exemplo que um argumento envolvendo recorrência (ou sequências recursivas) é bastante útil para a resolução do problema, uma vez que é adicionado um quadrado em cada etapa. As sequências recursivas não aparecem na BNCC do Ensino Médio, porém é citada em situações diferentes na BNCC do Ensino Fundamental nas seguintes habilidades:

> EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras (Brasil,2018, p.279).
>
> (EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos (Brasil, 2018, p.283).
>
> (EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras (Brasil,2018, p.283).
>
> (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura (Brasil, 2018, p.307).

Além das habilidades, as sequências recursivas são denotadas como objeto de estudo do eixo de álgebra da BNCC do Ensino Fundamental. É possível analisar que o intuito é que seja bastante trabalhada desde o 1º ano do Ensino Fundamental e no 7º ano o assunto seja tratado de forma explícita, de acordo com o documento, considerando também o Ensino Médio, uma vez que essa habilidade é importante, por exemplo, para o pensamento computacional, tanto no entendimento dos processos até na organização de problemas complexos em problemas menores.

Como um lado do novo quadrado é comum com quadrado já existente, chegamos na relação de recorrência $C(Q) = C(Q - 1) + 3$, $C(Q)$ a quantidade de canudos no respectivo retângulo formado por Q quadrados consecutivos, com $C(1) = 4$. Isso é claramente uma progressão aritmética de razão 3, novamente relacionada à habilidade EM13MAT507 da BNCC. De forma recursiva vemos, por exemplo, que para 4 iterações, ou para $Q = 4$ quadrados temos:

$$C(4) = C(3) + 3 = (C(2) + 3) + 3 = (C(1) + 3) + 2 \times 3 = 3 \times 4 + 1$$

canudos; e concluímos que $C(Q) = 3Q + 1$, o que nos leva à alternativa b). Argumento envolvendo recorrência é também útil no Exemplo 3.

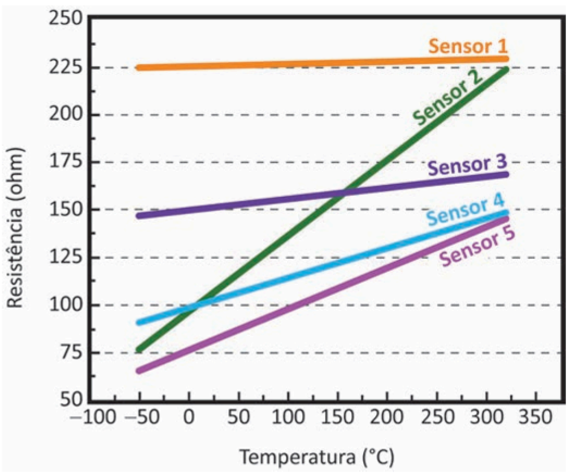
Frequentemente há questões sobre funções no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) não só no conteúdo de Matemática e suas tecnologias bem como nos conteúdos de ciências biológicas e ciências da natureza, trazendo à tona a importância do estudo de funções na formação e no cotidiano das pessoas; e atendendo mais uma habilidade presente na BNCC.

> (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (Brasil,2018, p.533).

Essa habilidade poderá ser vista mais adiante nesse trabalho, no ajuste de curvas de uma garrafa de sabão, por exemplo.

Exemplo 5: Na prova de cor cinza disponibilizada no portal do INEP do ano de 2025 no eixo de ciências da natureza e suas tecnologias, a questão de número 134 relaciona as grandezas resistência e temperatura apresentando transversalidade entre funções e os conteúdos de física e química, e é enunciada a seguir: A resistência de um fio de platina pode ser usada para medir temperaturas entre 0°C e 100ºC e já foi utilizada como referência para a escala internacional de temperatura. Para um sensor feito de platina, a relação entre a resistência e a temperatura pode ser descrita por uma equação do tipo $R(T) = A + BT$, em que T é a temperatura e A e B são constantes. O gráfico apresenta a dependência da resistência em função da temperatura para cinco diferentes sensores, conforme Figura 4.

Figura 4- Gráfico de variação de temperatura



Fonte: ENEM 2025.

A pergunta para o problema é: Os sensores que apresentam maior sensibilidade são. As opções que podem ser escolhidas eram: a) 1 e 2; b) 1 e 3; c) 2 e 3; d) 2 e 4 e e) 2 e 5. Já no enunciado da questão aparecem termos relevantes para este trabalho que são: “relação”;

"dependência" e "função" já mencionados anteriormente neste texto e os conceitos de relação e função serão definidos formalmente posteriormente.

No caso, para resolução deste exemplo, o foco principal é na variação de valores de acordo com a constante de cada sensor. Uma possibilidade para o participante que estava realizando a prova era calcular a diferença, ou seja, a taxa de variação entre temperatura final e a inicial, chegando a conclusão que quanto menor a variação, ou o quão próximo o gráfico correspondente está de uma reta horizontal, menos sensível o sensor é e quanto mais próxima a uma reta vertical, mais sensível o sensor é. Outra forma é pela observação dos coeficientes angulares de uma função afim. Com isso, os sensores 1 e 3 estão mais próximos da constância, com sensibilidade menor e os sensores 2 e 5 possuem sensibilidade maior, e a alternativa correta é de letra e.

Além da conexão de conteúdos, o Exemplo 5 traz conceitos importantes de leitura e interpretação de gráficos, uma vez que a questão não tem informações suficientes para ser resolvida quando é desconsiderado o gráfico.

A BNCC, mais uma vez, implica uma habilidade envolvida nesta questão com os dizeres:

> (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil,2018, p.525)

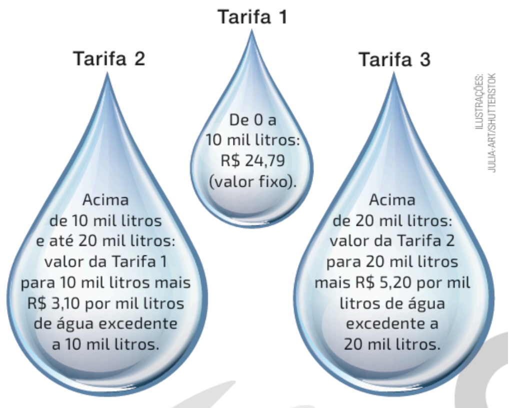
Com o mesmo intuito, Bonjorno (2020), no problema 13 da página 70, apresenta o exemplo 6 deste trabalho que contém os mesmos requisitos da habilidade EM13MAT101, conectando os assuntos do eixo de Matemática e suas tecnologias e Ciências da natureza e suas tecnologias, que está enunciado a seguir.

Exemplo 6: A relação entre uma medida de temperatura expressa em grau Celsius (°C) e em grau Fahrenheit (°F) é dada pela fórmula, $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$, em que C representa o valor em graus Celsius e F representa o valor em grau Fahrenheit. Sabe-se que em um período de 10 anos a média de temperatura no mês de dezembro, em Londres, variou de 2°C a 10°C. A partir dessas informações, responda: o valor de 56°F pertence a esse intervalo?

O Exemplo 6 contém alguns conteúdos previstos na habilidade EM13MAT101, envolvendo variação de duas grandezas e taxas de variação. Para este exemplo, usará a substituição de variáveis em uma função, conceito que será muito utilizado na aplicação do jogo deste trabalho. Resolvendo esta situação, temos que $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$, como F=56, então $C = \frac{5}{9} \cdot (56 - 32)$. Daí, encontramos que C é aproximadamente 13,3. Resultando que os 56°F não pertencem ao intervalo da média de temperatura no mês de dezembro.

Exemplo 7: Steigenberger (2020) trata de assuntos relevantes para o dia a dia, como o cálculo de uma fatura de água no problema 2 na página 36, Para saber como é calculado o valor da fatura de água, Armando fez uma pesquisa no site da companhia de saneamento básico da cidade onde mora. Veja as informações obtidas por ele, conforme Figura 5.

Figura 5- Tarifas cobradas de acordo com o consumo de água



Fonte: Steigenberger, 2020, p.36

Além da Figura 5, é apresentada a linguagem matemática procurada.

De acordo com as informações obtidas, Armando escreveu a lei de formação[3] de uma função que possibilita calcular o valor da fatura $f(x)$ de acordo com o consumo x em mil litros no próprio enunciado, dada pela função definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 24.79 & : 0 \leq x \leq 10 \\ 24.79 + 3.1\,(x - 10) & : 10 < x \leq 20 \\ 5.2\,(x - 20) + 55.79 & : x > 20 \end{cases}$$

Neste problema da Figura 5 há duas perguntas: A primeira é para efetuar o cálculo de $f(x)$ para dois volumes gastos, um de 12 mil litros e outro de 27,3 mil litros de água e depois pede para representar a lei de formação encontrada por Armando utilizando um *software* de geometria dinâmica como auxílio.

---

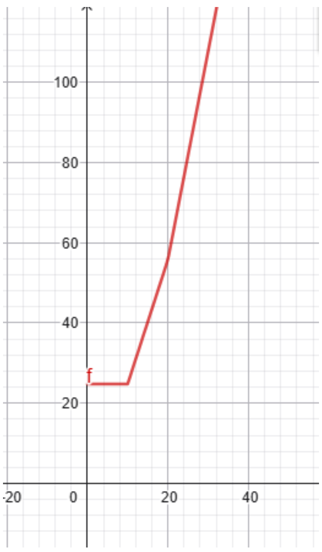
[3] Conta de água Link para construção dessa função no Geogebra.

Na BNCC, uma sugestão para *softwares* envolvendo grandezas e relações, é:

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (Brasil,2018, p.531)

Na resolução do problema da Figura 5 no *software Geogebra* cabe muitas discussões dentro de sala de aula, desde a inserção de tecnologias no cotidiano escolar até a importância de utilizar a tecnologia a nosso favor até em assuntos como economias domésticas e meio ambiente. Na Figura 6 mostramos parte da resolução do problema utilizando o método proposto.

Figura 6- Gráfico para o problema envolvendo a conta de água



Fonte: Do autor.

É possível que o aluno veja como o gráfico é descrito quando há um valor constante, que não se altera seguindo uma regra. Ou seja, um elemento na lei de formação que esteja fixo. Para esse problema, significa que quando o gasto de água está contido entre 0 a 10 mil litros por mês, sempre pagará o mesmo preço de R$24,79, que será um valor constante de acordo com o volume de água gasto. Para as faturas que o volume utilizado foi acima de 10 mil litros de água, é pago um preço proporcional ao restante, estabelecendo uma relação de dependência do preço pela quantidade de água que foi usada.

Segundo a BNCC, na competência específica 1, reforça que é esperado que se use estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. Os diferentes meios estão relacionados com a representação em gráficos.

> (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais (Brasil,2018, p.525)
> (EM13MAT102) Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas (Brasil, 2018, p.525)

É importante salientar que neste trabalho foram utilizadas diferentes escalas para que as representações gráficas construídas no *Geogebra* tivessem melhor visualização dos conceitos que envolvem função, que são prioridades neste trabalho.

Depois de mencionar a ideia de função informal e a correspondência entre variáveis nos exemplos anteriores, contextualizada de acordo com o cotidiano de um professor, serão apresentadas definições matemáticas que foram baseadas no livro texto de Iezzi (2013) e nos livros didáticos já mencionados, adotados pelas escolas onde ocorreram as intervenções pedagógicas.

Par ordenado

Dados dois conjuntos não vazios A e B, ao escolhermos primeiro um elemento $a \in A$ e depois um elemento $b \in B$, podemos representar esta escolha como (a, b) que chamamos de par ordenado. Por exemplo, tomando A e B *como o conjunto dos números reais,* $(3, 2)$ é um par ordenado que representa que 3 vem antes do 2, já $(2, 3)$ é outro par ordenado e agora o 2 vem antes do 3.

Dados dois conjuntos não vazios A e B, o conjunto dos pares ordenados da forma (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$, é chamado de produto cartesiano entre A e B e é denotado por $A \times B$. A igualdade entre pares ordenados é definida como

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \ e \ b = d.$$

Relação Matemática ou relação binária

Uma relação matemática R é um subconjunto de $A \times B$, que descreve uma ligação entre elementos de dois conjuntos A e B (ou de um mesmo conjunto). Cada par ordenado $(x, y) \in R$ representa uma conexão, onde o primeiro elemento x está "relacionado" com o segundo elemento y. Relações podem ser visualizadas por meio do produto cartesiano ou através de diagramas. O conjunto $\{x \in A: (x, y) \in R\}$, dos elementos do conjunto A tais que existe algum elemento da forma (x,y) em R é o domínio da relação R, enquanto o conjunto $\{y \in B: (x, y) \in R\}$ é a imagem da relação R.

Como exemplo, considere a relação R que associa cada número real a números dos quais ele é um quadrado. Teremos que a relação R é o conjunto dos pares ordenados (x^2, x), sendo x um número real. Os pares (1,-1), (1,1); (8,2); (8,-2); $(2,\sqrt{2})$, e assim por diante, estão em R.

Como outro exemplo, podemos estabelecer a relação com as informações do Exemplo 1, ou seja, relacionar a quantidade de bananas e o seu preço.

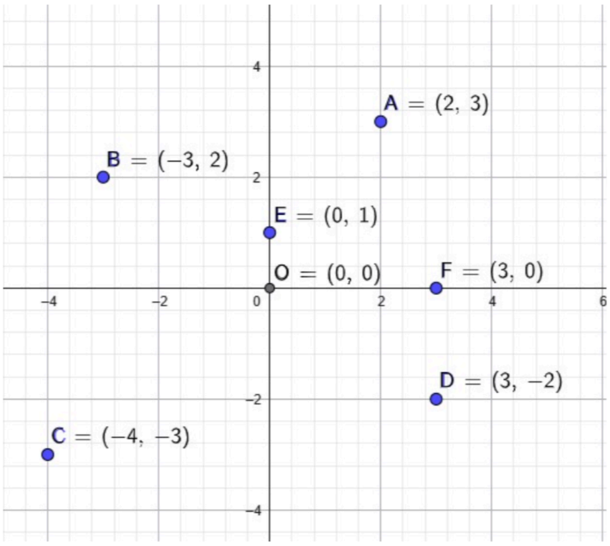
Plano Cartesiano

O plano cartesiano é usualmente definido partindo de duas retas perpendiculares no plano Euclidiano α, com um ponto O em comum. Escolhemos uma ordem para essas retas e as chamamos de eixos x e y respectivamente. Como é feito na Geometria Euclidiana, identificamos cada ponto dessas retas a um único número real, mantendo uma ordem e associando o ponto O ao número 0. O plano cartesiano é então uma identificação dos pontos do plano α com os elementos do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, em que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.

O plano cartesiano é composto de quatro quadrantes[4], como exemplificado na Figura 7. Com isso, tem-se termos relevantes:

[4] Link para o plano cartesiano do Geogebra.

Figura 7- Pontos no plano cartesiano



Fonte: Do autor.

Abscissa: reta horizontal que está representada por x;

Ordenada: reta vertical que está representada por y;

Origem: ponto O que é o encontro das retas x e y;

Como foi apresentado no item sobre par ordenado e sobre relações matemáticas, a expressão $A=(x,y)$ denota que o ponto A do plano é identificado com as coordenadas (x,y), em que o eixo x está relacionado à primeira reta, a horizontal, e o eixo y à segunda reta, vertical.

O plano cartesiano é um recurso muito importante para as tecnologias digitais. Como este trabalho visa a consolidação do conteúdo de funções pela via da resolução de problemas e o pensamento computacional, o exemplo de aplicação terá este viés.

O exemplo atual e moderno do plano cartesiano nas tecnologias digitais é citado no texto de Pesco e Bortolossi (2025) "imagens digitais e matrizes", onde as imagens digitais são formadas por pixels organizados em linhas e colunas, constituindo matrizes numéricas nas quais cada elemento representa a cor ou a intensidade de um ponto da imagem. Esse modelo pode ser relacionado ao conceito de funções, pois cada posição da matriz pode ser entendida como uma relação entre coordenadas no plano cartesiano (que representa a tela e um celular, por exemplo) e valores numéricos que definem a imagem, por meio de alteração de cores, brilho e contraste, por exemplo.

Além disso, transformações como alteração de brilho, contraste, rotação e redimensionamento podem ser realizadas por meio de operações matemáticas nas matrizes, mostrando que as funções permitem modificar e processar imagens digitais, evidenciando a importância da Matemática no funcionamento das tecnologias visuais (PESCO, BORTOLOSSI, p.45).

Conceito de função

Uma função do conjunto A no conjunto B é uma relação matemática R, ou seja é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, tal que, para cada $x \in A$, existe um único $y \in B$, com $(x, y) \in R$. Cada par ordenado $(x, y) \in R$ representa uma conexão entre x e y, onde o primeiro determina o segundo elemento. De maneira geral, uma função do conjunto A no conjunto B é indicada por letras minúsculas como f, ou como $f: A \rightarrow B$. Em outras palavras, a função de A em B consiste em alguma regra que permita associar, a cada elemento de A, um único elemento de B.

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

O conjunto A chama-se domínio de uma função $f: A \rightarrow B$. Este conjunto é constituído por todos os elementos x (variável independente) de A e pode ser denotado por D(f).

O conjunto B é chamado de contradomínio da função. Este conjunto é constituído de todos os elementos y (variável dependente) de b e pode ser indicado por CD(f).

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y, associado a x pela função f, damos o nome de imagem de x pela função f e indicamos por y = f(x).

Durante o trabalho também aparecerão casos específicos de funções que foram utilizadas para construção do baralho do jogo, as chamadas funções elementares segundo Iezzi (2013). As funções utilizadas foram definidas com base no livro de Bonjorno (2020) e Iezzi (2013).

Funções polinomiais

Uma função polinomial é aquela que pode ser expressa como uma soma de um ou mais termos, onde cada termo consiste em um número (coeficiente) multiplicado por uma variável elevada a um expoente inteiro e não negativo.

Toda função polinomial tem sua lei de formação como um polinômio que são classificados como operações algébricas que tem coeficientes e partes literais, que significam, respectivamente, números e letras. O polinômio também é conceituado como uma soma algébrica de monômios não semelhantes, que são letras distintas acompanhadas por números, separados pelas operações de adição e subtração. As funções são classificadas de acordo com o maior expoente inteiro, que é o grau do polinômio.

Cabe destacar que os polinômios e equações polinomiais são vistos no Ensino Fundamental II, que é o primeiro contato com a expressão "segundo grau", principalmente com o estudo de produtos notáveis.

Função constante e função afim: Uma função afim, ou função polinomial do primeiro grau, é uma função dada por

$$f(x) = ax + b,$$

sendo os números reais fixos a e b chamados de coeficientes. Quando o coeficiente *b* é nulo a função recebe o nome de função linear.

Um exemplo de função afim, pode ser descrito pelo exemplo do começo do capítulo, com o gráfico na Figura 4 que explica sobre as variações de temperatura. Outro caso é o exemplo sobre a compra de bananas em dúzias representada por uma função linear, embora com restrição de domínio ao conjunto dos números naturais. Neste exemplo, temos $b=0$, uma vez que não tem preços fixos para somar.

Já quando o coeficiente a for nulo, a função será um polinômio de grau 0, chamada de função constante. Esse tipo de função é comum na modelagem de uma situação típica em restaurantes que pode-se comer livremente pagando um preço único, por exemplo. Então, suponha que no restaurante A o preço para o consumo da comida é de R$85,00 para qualquer adulto. Independente da quantidade de comida que se é servida pela pessoa, o preço continuará o mesmo, sendo descrito por $p(m)=85$, tal que m é a massa da comida ingerida pelo cliente e $p(m)$ é o preço pago pela comida.

Outro exemplo envolvendo funções constantes e afins é o exemplo da conta de água, relacionada à Figura 5, em que tais funções aparecem na expressão de uma outra função definida por partes.

Função quadrática: Uma função quadrática é uma função polinomial do segundo grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que a, b e c são números reais e a é diferente de zero.

O conteúdo visto no Ensino Fundamental II de equações polinomiais do segundo grau é sobre o estudo de raízes de uma equação e os vértices do gráfico, que no caso é uma parábola.

Exemplo 8: Um problema comum que podemos nos depararmos envolvendo matemática financeira e funções quadráticas é: João foi à uma loja comprar os presentes de Natal no dia 10 dezembro, uma das escolhas de João foi uma camiseta de R$100,00. Como ele não tinha o dinheiro no momento, comprou em duas prestações no boleto. Nestas condições de parcelamento, cada boleto foi no valor de R$55,00. O vencimento do primeiro boleto foi nos próximos meses, no dia 10 de janeiro, e o segundo vencimento no dia 10 de fevereiro. Qual a taxa de juros mensal que ele deverá pagar nesta compra?

Para resolução deste problema podemos usar novamente um argumento de recursão. Como João não tinha dinheiro para a entrada, o valor total sofreu acréscimo. Lembramos que no cálculo do valor a ser pago, incluindo a taxa de acréscimo ou juros mensal x, é preciso acrescentar ao valor do capital a taxa de juros x vezes o valor do capital. Para a dedução do valor da dívida em cada momento seguimos os passos:

1º passo: Ao comprar a camiseta é adquirida uma dívida de R$100,00, que chamamos de $d_0(x) = 100$, em que x denota uma taxa de juros mensal. Cabe destacar que nesse problema o valor de x está entre 0 e 1.

2º passo: Ao considerar que uma prestação já foi paga, a dívida no dia 10 de janeiro será

$$d_1(x) = 100(1 + x) - 55;$$

3º passo: Finalmente, ao considerar que a segunda prestação foi paga, a dívida no dia 10 de fevereiro será

$$d_2(x) = [100(1 + x) - 55\,](1 + x) - 55,$$

que deve ser nula no problema em questão.

4º passo: Para encontrarmos a taxa adequada, nós encontramos[5] as raízes do polinômio do segundo grau

$$d_2(x) = 100x^2 + 145x - 10 = 0,$$

o que nos dá a taxa de juros de aproximadamente 6,6% ao mês.

Função cúbica: A função cúbica (função polinomial do terceiro grau) é uma associação de $x \in \mathbb{R}$ ao elemento $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

[5] Link para comandos no Geogebra para manipulação da função polinomial.

Exemplo 9: Uma das aplicações das funções cúbicas é em compras em prestações como no exemplo em que João comprou uma camiseta, só que agora, serão em três prestações para modelagem do problema, atendendo mais uma habilidade da BNCC:

> (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais (Brasil,2018,p.528).

Considerando o problema de João e a camiseta que comprou de presente para o Natal, suponhamos que João tenha optado por pagar em três prestações e o vendedor comunicou que cada uma das parcelas seria de R$36,70. A estratégia para a resolução do problema é a mesma, ou seja, usando um processo de recursão para obter uma expressão para dívida em função da taxa de juros, em cada etapa de pagamento. Seguindo os passos:

1º passo: Dívida inicial (que é o preço de R$100,00);

2º passo: Após um mês, considerar a taxa de juros mensal x e a prestação já paga de R$36,70. A dívida em função dessa taxa de juros será denotada por $d_1(x)$, e será dada por

$$d_1(x) = 100(1 + x) - 36,70;$$

3º passo: Após dois meses, considerar novamente os valores para a nova prestação paga e agora a dívida será

$$d_2(x) = [100(1 + x) - 36,70] (1 + x) - 36,70.$$

4º passo: No último mês, após pagamento da última prestação, a dívida, com a taxa de juros mensal adequada, deve ser nula, tendo a forma

$$d_3(x) = [100(1 + x) - 36,70][(1 + x) - 36,70 (1 + x) - 36,70].$$

Manipulando[6] a função $d_3(x)$, com auxílio do Geogebra, encontramos a taxa de juros como 5% ao mês.

Segundo a BNCC, a competência 3, está relacionada com a utilização de estratégias, conceitos, definições, construção de modelos e a resolução de problemas em diversos contextos.

Exemplo 10: Abrangendo esta competência, é possível a utilização de uma função cúbica para a modelagem da superfície ou da borda de um objeto usado no cotidiano conforme a Figura 8. A garrafa tem um formato arredondado que é larga na base e estreita no meio e larga novamente na parte de cima. Devido ao formato da garrafa, a altura da água não aumenta de forma constante ao enchê-la. O corpo da garrafa lembra um formato de "S" que

---

6 Link para comandos no Geogebra para manipular a função.

matematicamente pode ser relacionado às funções cúbicas. As mudanças na forma da garrafa são pontos em que a função muda a concavidade, chamados pontos de inflexão.

O software *GeoGebra* auxilia no ajuste na curva para obtermos uma aproximação do contorno da garrafa por meio de uma função, seguindo os passos:

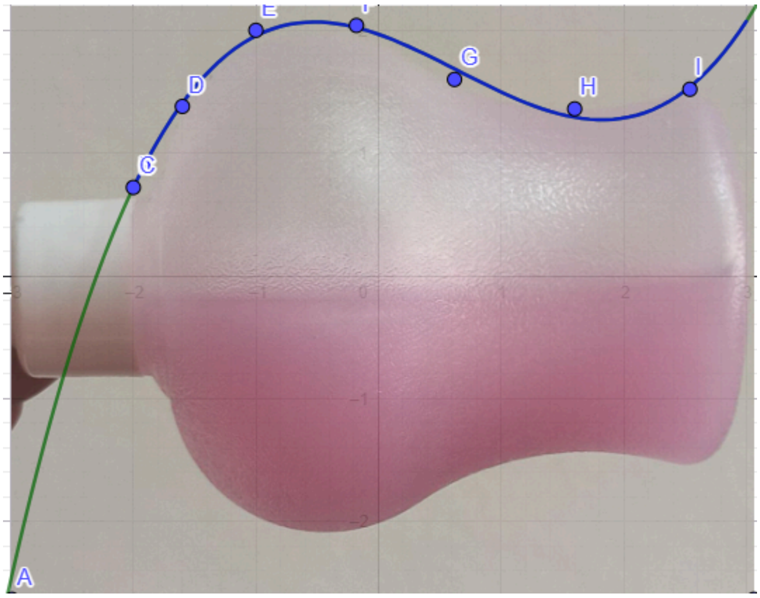
1º passo: Colar a imagem em um arquivo em branco do *GeoGebra*

2º passo: Dispor diferentes pontos em cima da curva, quanto maior o número de pontos, melhor o ajuste.

3º passo: Deixar a imagem transparente para melhor visualização da curva de ajuste.

4º passo: Fazer o ajuste da curva com função pronta do Geogebra[7].

Figura 8- Garrafa de sabão



Fonte: Do autor.

O Exemplo 10 faz uma alusão ao que é pedido em uma das habilidades da BNCC, que é a conversão de representações algébricas de funções para representações no plano cartesiano.

> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (Brasil, 2018, p.531).

Na verdade, podemos usar funções polinomiais para aproximar localmente o comportamento de situações cuja representação gráfica tem forma de um gráfico de uma

[7] Link para comandos no Geogebra para ajuste de função polinomial para parte do contorno da garrafa de sabão.

função, mesmo que o traçado seja feito à mão livre[8], com um lápis ou uma caneta. Isso justifica bastante o interesse no estudo desse tipo de funções[9], principalmente porque as expressões de funções polinomiais envolvem operações matemáticas que esperamos que os alunos já tenham bastante familiaridade no Ensino Médio.

Fazendo referência ao pensamento computacional, em que o conceito de função está relacionado com a entrada de um conjunto de dados que resulta em uma imagem, que está contida no contradomínio que seria a saída de um comando estabelecido, a BNCC reforça em vários momentos do texto e também na habilidade:

> (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada (Brasil, 2018, p.533).

A matemática associada ao uso de tecnologias digitais, é um importante recurso pedagógico no ensino de funções, pois possibilita ao estudante explorar conceitos matemáticos por meio da experimentação, da visualização e da modelagem. O software *GeoGebra*, nesse contexto, destaca-se por integrar representações algébricas, gráficas e numéricas em um mesmo ambiente, favorecendo a construção do conceito de função de maneira dinâmica, contando com o acesso gratuito e livre, sem limitações de uso do *software*.

Um dos aspectos relevantes do uso do *GeoGebra* é a possibilidade de trabalhar com dados, permitindo que os alunos obtenham funções aproximadas a partir de conjuntos de pontos obtidos em algum experimento. Esse recurso contribui para o desenvolvimento exploratório para a observação de padrões, fortalecendo o pensamento computacional e a modelagem matemática, uma vez que o estudante passa a investigar qual função, em especial funções polinomiais, melhor representa determinado comportamento observado, como mostrado no ajuste de curvas que modelam o comportamento do contorno da garrafa de sabão da Figura 8, por exemplo.

Cabe observar que nem sempre podemos obter uma boa aproximação para o contorno de um objeto quando fixamos o grau do polinômio, porém é possível encontrar uma curva relacionada ao formato do objeto quando variamos o grau do polinômio e adicionamos ou reduzimos o número de pontos. Essa abordagem de aproximação de pontos para o contorno de um objeto é uma prática da matemática aplicada, sendo uma boa ferramenta para o ensino de funções de forma concreta e digital.

---

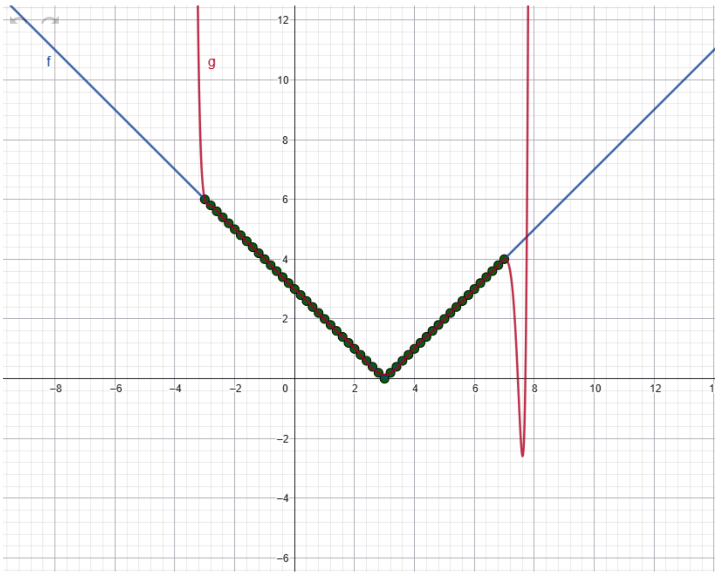
[8] Link para comandos no Geogebra para função com gráfico feito à mão livre.
[9] Link para comandos no Geogebra para uma função que se ajusta à imagem de tobogã.

Além disso, as tecnologias digitais e o softwares como o *GeoGebra* possibilitam o estudo de funções polinomiais em intervalos contínuos, bem como a construção de funções definidas por partes, analisando o comportamento da função em pequenos intervalos do domínio. Essa exploração favorece a compreensão local da função, permitindo ao aluno observar variações, continuidade e mudanças de comportamento ao longo do domínio. Dessa forma, o estudante compreende que uma função não se limita a uma única expressão algébrica global, mas pode ser definida de modo segmentado, conforme o intervalo considerado.

Função modular

A função modular $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por $f(x) = |x|$, em que $|x| = x$, quando x é um número não negativo, e $|x| =- x$, quando x é um número negativo, ou seja, é o valor absoluto de *x*. Por exemplo, $f(-3)$ na função $f(x) = |x|$ é igual a 3 e $f(3)$ também é 3. O gráfico de uma função modular pode ser visto na Figura 9. Uma observação interessante é que podemos aproximar essa função, em um intervalo definido, por uma função polinomial de grau adequado[10].

Figura 9- Gráfico de uma função modular



Fonte: Do autor

Exemplo 11: As funções modulares podem ser utilizadas em controles de qualidade para produtos alimentícios. Por exemplo, considere que uma empacotadora de arroz produz

[10]Link para manipulação da função modular.

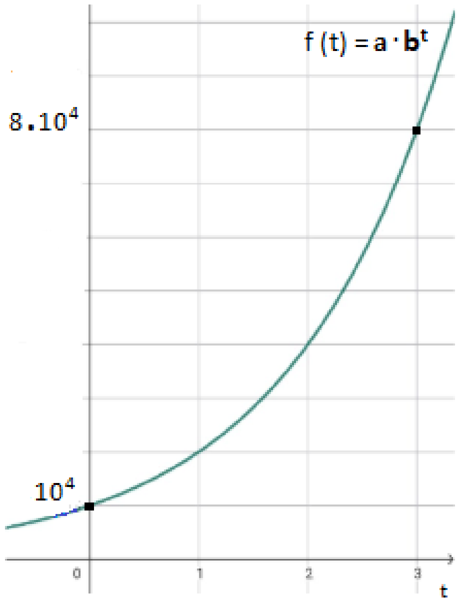
pacotes de 5 quilos. Pode-se estabelecer um controle de qualidade para regular essa empacotadora, indicando a margem de erro no peso. Suponhamos que a empacotadora aceite 1% além dos 5kg ou abaixo dos 5kg no peso. É possível definir este problema com a função $f(x) = |x - 5|$ tal que x é o peso do pacote de arroz. Se $f(x) > 0,05$kg, ou 50g, a máquina precisa ser ajustada. É preciso que a função seja em módulo porque é uma quantidade de peso e não faz sentido peso negativo, a representação é dada por um número positivo e sinalizado se a quantidade de arroz está em excesso ou falta.

Função exponencial e logarítmica

A função exponencial é dada por $f(x) = a^x$, $a > 0$ fixo, com $a \neq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Não é possível fixar a negativo pois, por exemplo, para $a = -2$ e para $x = \frac{1}{2}$, e o resultado não está definido como um número real. A função exponencial, possui uma função inversa, ou seja, uma função $g(x)$, que denotamos por $log_a(x)$ e chamamos de função logarítmica, tal que $f(g(x)) = x$ ou $log_a(x) = y$ apenas quando $a^y = x$.

Exemplo 12: Funções exponenciais são necessárias na área de ciências biológicas e ciências da natureza para o cálculo de meia vida de substâncias e proliferação de bactérias. Como descrito no problema 7 de Bonjorno (2020): o gráfico da Figura 10 mostra a evolução de bactérias em certa cultura. Quantas bactérias haverá aproximadamente nessa cultura decorridos 30 minutos do início das observações?

Figura 10- Evolução das bactérias ao decorrer do tempo



Fonte: Do autor.

Para a resolução do exemplo 12 temos que a função é descrita por $f(t) = a.b^{t}$.

1º Passo: Na leitura do gráfico, é possível observar que $f(0) = 10^{4}$, ou seja, no início do experimento haviam 10000 culturas de bactérias.

2º Passo: Encontrando o valor de $f(0)$ no passo 1, podemos concluir que o valor de a= 10^{4}, pois $f(0) = a.b^{0}$.

3º Passo: É possível analisar no gráfico também que $f(3) = 8.10^{4}$, ou seja, $f(3) = b^{3}.10^{4}$. Logo, $8.10^{4} = b^{3}.10^{4}$, dividindo ambos os lados por 10^{4}, temos que $8 = b^{3}$ então $b = 2$, isto é, a cada hora a cultura de bactérias tem o seu valor dobrado.

4º Passo: Como o exemplo pergunta pela a quantidade de culturas de bactérias em 30min, que é em metade de uma hora, temos que $f(\frac{1}{2}) = 10^{4}.2^{\frac{1}{2}}$ que é o mesmo que: $f(\frac{1}{2}) = 10^{4}\sqrt{2}$, utilizando aproximação, teria cerca de 14142 culturas de bactérias, um aumento de cerca de 41% nessa meia hora.

Exemplo 13: Um exemplo comum e acessível a professores e estudantes, de uma função exponencial, é o delineado de uma cadeira escolar que pode ser aproximada por uma função exponencial [11] como pode ser visto na Figura 11 .

[11] Link para ajuste usando função exponencial da cadeira escolar.

Fotografia 11- Aproximação de contorno de cadeira escolar

Fonte: Do autor

No exemplo da cadeira escolar, é possível analisar de duas formas: como está apresentada na Fotografia 11, como uma função decrescente, que é descrita por $f(x) = (\frac{3}{5})^x$ ou ainda como uma função crescente que será dada por $f(x) = (\frac{5}{3})^x$ como pode ser visto na Fotografia 12.

Fotografia 12- Aproximação de contorno de cadeira escolar em outro sentido

Fonte: Do autor

Na BNCC também há sugestões de como trabalhar as funções exponenciais em duas habilidades em sequência.

> (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso (Brasil,2018, p.545).

O intuito da habilidade é que o discente consiga relacionar o conteúdo de funções exponenciais com outras áreas do conhecimento, com o mesmo pressuposto:

> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros (Brasil,2018, p.545).

Exemplo 14: Estas habilidades podem ser notadas no problema de Bonjorno (2020), na página 69 problema 25, que está nomeado de *a* a *d*, com a seguinte pergunta: Um banco possui uma taxa de rendimento na poupança de 0,35% ao mês. Um cliente que possui poupança neste banco depositou R$1000,00 no mês de janeiro e, ao longo de 6 meses, não realizou saques e nem depositou quantias a mais. Conforme representado na Figura 13.

Figura 13- Taxa de juros do banco

> Valor disponível em poupança após 6 meses de aplicação

Mês	Poupança (R$)
Janeiro	1.000,00
Fevereiro	$1.000,00 \cdot 1,0035 = 1.003,50$
Março	$1.003,50 \cdot 1,0035 = 1.007,01$
Abril	$1.007,01 \cdot 1,0035 = 1.010,53$
Maio	$1.010,53 \cdot 1,0035 = 1.014,07$
Junho	$1.014,07 \cdot 1,0035 = 1.017,62$

Dados fictícios.

Fonte: Bonjorno, 2020, p.69

As perguntas relacionadas a este problema, explicam alguns conceitos e deixa em aberto para discussões importantes, são elas:

a) Qual a taxa de variação média aproximada da poupança entre o sexto e o primeiro mês deste ano?

b) Considerando que não houve saques nem depósitos nessa aplicação, determine a lei de formação da função que representa o valor disponível em poupança em relação ao número de meses em que o capital foi aplicado.

c) Quanto este cliente terá após 12 meses sem realizar saques e nem depósitos?

d) Pelo item b), é possível perceber que a função escrita é uma função exponencial. Essa função é utilizada no estudo de juro composto. Nesse tipo de aplicação, a cada mês, o rendimento é aplicado sobre todo o montante disponível. Quando a aplicação é feita sob o regime de juro simples, o rendimento é aplicado sobre o capital inicial. Se a aplicação do enunciado fosse com esse tipo de juro, a cada mês haveria um rendimento de R$ 3,50 (0,35% de R$ 1.000,00).

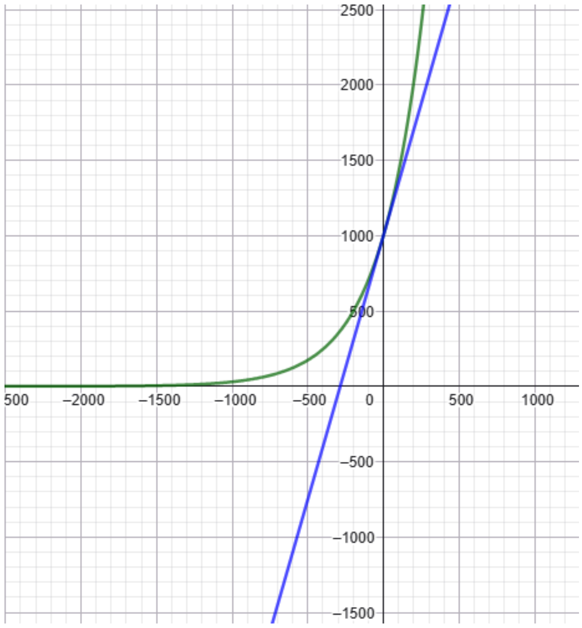
Com base nessas informações e utilizando uma planilha eletrônica, faça, em um único gráfico, a curva de evolução do valor disponível na poupança após 300 meses com um capital inicial de R$ 1.000,00 e rendimento de 0,35% ao mês considerando juro composto e uma curva, com os mesmos parâmetros, mas considerando juro simples. Depois, faça uma análise da curva do primeiro caso e do segundo. O gráfico da curva do primeiro caso é característico de qual tipo de função? E o gráfico do segundo caso?

O item d), principalmente, envolve o que acontece com os juros de faturas de cartões de créditos de bancos digitais, este item pode ser melhor analisado no link[12] que contém a resolução do problema. A cada dia que você atrasa e não paga o valor total de uma fatura, é calculado o juro, em cima do montante do dia anterior, então o valor de acréscimo, nunca é o mesmo, uma vez que o capital inicial muda diariamente.

No Exemplo 14, a solução envolve dois tipos de gráficos conforme a Figura 14. Os gráficos que fazem o delineamento das funções são uma função exponencial, em verde, e uma função afim, em azul, que foi definida na abertura deste capítulo. Com isso, vemos que podemos utilizar diferentes funções em situações do cotidiano e ainda é possível, em um mesmo problema, encontrar interseções entre gráficos que levam a solução.

[12] Link para simulação no Geogebra para problema de rendimentos do banco.

Figura 14- curva de rendimentos do banco

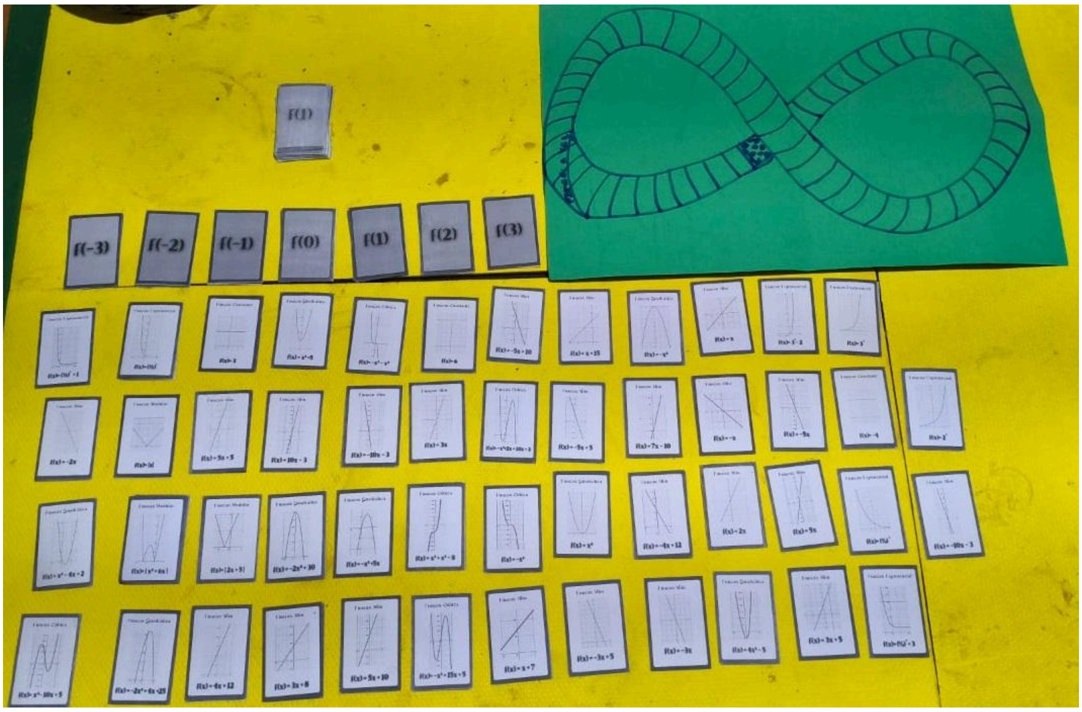


Fonte: Do autor

4 Sobre o jogo proposto

A ideia do jogo surgiu na primeira quinzena de abril de 2025. O primeiro esboço do tabuleiro do jogo foi pensado no mês de maio de 2025 e as primeiras cartas impressas, que foram confeccionadas na segunda quinzena de junho estão sendo apresentadas na Fotografia 15.

Fotografia 15- Tabuleiro e cartas do jogo corrida das funções



Fonte: Do autor.

O jogo que será descrito neste capítulo foi pensado e desenvolvido para o produto educacional deste trabalho de mestrado profissional, mas principalmente para unir o gosto pessoal do autor por jogos, com a tentativa de ministrar aulas mais dinâmicas e diversificadas, na busca de melhorar a aprendizagem do conteúdo e lidar com algumas habilidades esperadas no desenvolvimento dos jovens. Embora o jogo tenha sido pensado para a sala de aula ele pode ser adaptado para entretenimento em outros ambientes.

O jogo precisa de pelo menos dois jogadores, mas o ideal é que jogue em 6 jogadores, evitando longos períodos de espera e deixando o jogo mais dinâmico e interativo. Se houver muitas pessoas, é possível jogar em duplas ou ter mais de um tabuleiro. Entendemos que é melhor que a disputa entre os participantes seja individual para que cada um desenvolva estratégias, mas no caso de disputas em duplas eles podem aprender novas estratégias e superar algumas dificuldades individuais e favorecer a interação social. O professor pode buscar deixar as duplas mais heterogêneas, os que têm mais dificuldades com os que têm menos dificuldades, por exemplo.

O conteúdo de funções do jogo foi escolhido com base na experiência de sala de aula, uma vez que é um conteúdo complexo para os alunos e que depende de pré-requisitos do Ensino Fundamental.

No primeiro momento, os alunos construíram seus próprios tabuleiros e com isso, na própria pista, eles criaram regras de sorte e revés como “pule 10 casas”, “perca sua vez”, “retroceda 3 casas”. O tabuleiro que é sugerido é dividido por cores e dependendo da cor que parou, é preciso seguir uma regra diferente, que estão explicadas na seção de regras, no item “regras do tabuleiro proposto”.

O processo de criação do jogo durou cerca de seis meses, entre modificar a ideia principal e colocá-la em prática. A parte da fabricação dos baralhos e do tabuleiro contou com desafios. As cartas, que estão em anexo, foram criadas a partir de dois *softwares*, para a produção de gráficos das funções foi utilizado o *Geogebra* e padronização foi feita com o aplicativo Canva, que demandaram mais conhecimento dos *softwares* e bastante tempo para a produção, contando com dois reajustes da primeira versão, tanto de gráficos errados, quanto estéticos. As cartas foram escolhidas aleatoriamente, no início havia mais funções que a versão final. A quantidade de cartas foi escolhida pelo maior número que cabia dentro da placa de impressão da gráfica, com maior aproveitamento da placa, com sobras de 1mm somente, para maior custo benefício.

Depois de seis meses no esboço e criação do jogo, demorou cerca de um mês para que a gráfica entregasse o trabalho pronto. Com os baralhos prontos, comecei a mostrar para os alunos como funcionaria a dinâmica do jogo. Neste momento, o intuito foi de fazer propaganda do jogo de modo que fosse algo divertido, com fim didático e que envolveria todos os alunos.

Além disso, contou com o alto valor de impressão das gráficas, o que por exemplo, demandou a impressão de cinquenta baralhos para compensar o valor de impressão das cartas, e a redução de custo de cada baralho impresso. Com a quantidade elevada de impressões de baralho, cada baralho custou cerca de R$20,00. Uma única impressão do baralho, o custo era de R$300,00. Levando em conta que o material utilizado é de boa qualidade e terá maior durabilidade do que somente impressa em papel A1.

O tabuleiro teve três versões diferentes, e o seu design teve a ajuda de um profissional e amigo pessoal. Este tabuleiro foi impresso em quatro materiais diferentes: lona, papel, PVC e poliéster. Os preços variaram de R$19,00 a R$45,00. O melhor custo benefício foi o tabuleiro impresso na lona, pois além de ser prático para o transporte, não foi a impressão mais cara, custando cerca de R$30,00.

Os peões foram produzidos por um aluno da escola intitulado A, mais adiante do texto através de uma impressora 3D com filamentos de cores azuis e pretas. O aluno já tinha mostrado outros objetos feitos na impressora 3D, então pedi para que ele confeccionasse alguns modelos de carrinho, o aluno colocou um preço justo nos peões, cerca de R$20 em todos os carrinhos confeccionados. Não foi possível o aluno produzir mais carrinhos, pois a impressora 3D parou de funcionar.

Regras do jogo

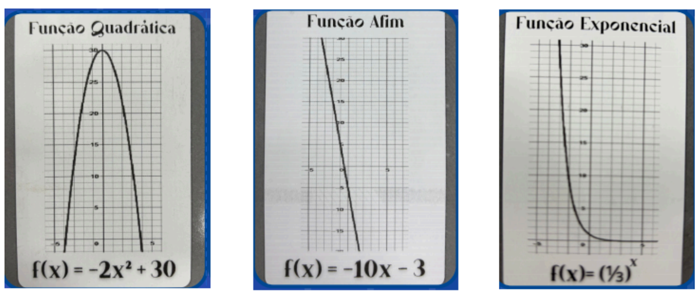
Número de jogadores: Mínimo 2 jogadores por partida. Ideal 6 jogadores. Máximo 10 jogadores. Cada peão pode ser jogado individualmente ou em duplas.

Objetivo do Jogo: Ser o primeiro a completar o número de voltas no sentido crescente da numeração do trajeto combinado previamente.

Materiais Necessários:

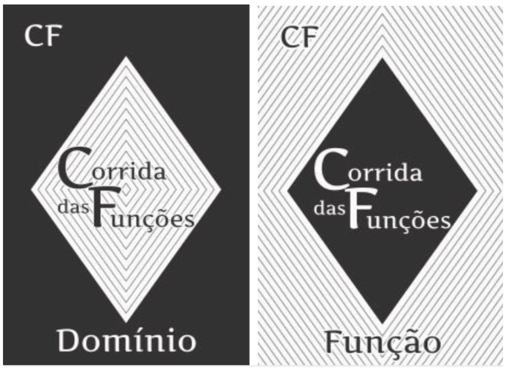
Baralho de Funções: Cartas com expressões como: $f(x) = 2x$, $f(x) = x^2 + 5$, por exemplo, como as da Fotografia 16 e parte de trás conforme Figura 17.

Fotografia 16 - Baralho de funções



Fonte: Do autor.

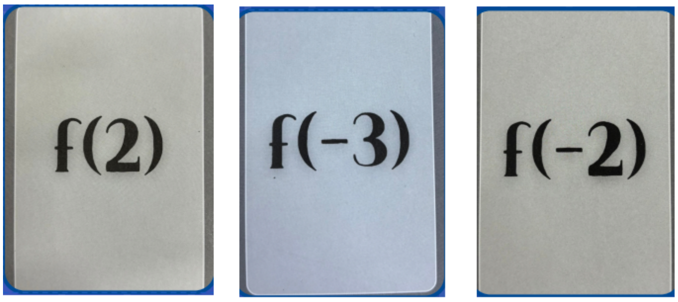
Figura 17- Parte de trás do baralho de domínio e funções



Fonte: Do autor.

Baralho de valores do domínio das funções: Cartas identificadas como: *f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)* conforme o da Fotografia 18.

Fotografia 18- Baralho de domínio das funções.



Fonte: Do autor.

Tabuleiro: Formato de pista (como um circuito), fazendo alusão às corridas e com potencial de gerir o tempo, gastando mais ou menos tempos de acordo com a disponibilidade do professor, uma vez que pode-se dar muitas voltas. Como tem a opção de criação de tabuleiro pelo próprio aluno, surgiram regras na própria pista de sorte e revés, com casas numeradas sequencialmente, por exemplo de 1 a 100. Uma possibilidade é que cada grupo produza seu próprio tabuleiro ou que seja o modelo padrão já impresso conforme o da Figura 19.

Figura 19 - Modelo de tabuleiro

Fonte: Do autor.

Peões ou marcadores (um por jogador), como o da Fotografia 20.

Fotografia 20 - Carrinhos feitos na impressora 3d.

Fonte: Do autor.

Bloco de papel para cálculos e lápis ou caneta.

Fase 1 — Definindo Quem Começa:

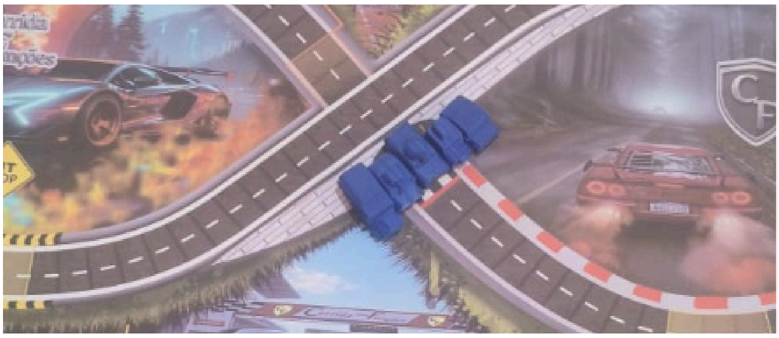
- Com o baralho já embaralhado, cada jogador (ou cada dupla) retira uma carta do baralho de domínio.

- O jogador que pegar o maior valor à esmo {ex: $f(3) > f(2) > f(1) > f(0) > f(-1) > f(-2) > f(-3)$} começa, em que $f(x)=x$ é a função identidade. Em caso de empate, os jogadores empatados retiram novas cartas até haver um vencedor.
- As cartas são devolvidas ao baralho e ele é embaralhado novamente.

Fase 2 — Preparação:

- Cada jogador retira 3 cartas de função e 3 cartas de domínio, de cada baralho, na ordem determinada antes.
- Todos posicionam seus peões na casa de partida quadriculada como na Fotografia 21.

Fotografia 21: Casa quadriculada de início.



Fonte: Do autor.

- O número de voltas a ser completado no tabuleiro é combinado previamente (ex: 1, 2 ou mais voltas) ou o professor pode estabelecer um tempo de jogo, e quando acabar o tempo, o jogador que estiver na casa de maior número e com o maior número de voltas completas, vence a partida.

Fase 3 — Jogando:

- Na sua vez, o jogador escolhe uma das suas cartas de função e uma das suas cartas de domínio.
- Substitui o valor de x (da carta de domínio) na função. Exemplo: $f(x) = x^2 + 5$ e carta $f(-2)$. Então calcula $f(-2) = (-2)^2 +5 = 4 +5 = 9$.
- O valor obtido para $f(x)$ indica quantas casas o peão deve se mover:
- Resultado positivo: avança.
- Resultado negativo: retrocede.

- Se o resultado não for inteiro: arredondar para o inteiro mais próximo seguindo as normas da ABNT 5891 de 2014. Exemplo: *f(x)= 2,6* e *f(x)= 3,4* andar 3 casas para frente. Para o caso de *f(x)= 3,5* ou *f(x)= 4,5* anda 4 casas porque aproxima para o número par.
- Após a jogada, o jogador descarta as duas cartas usadas e retira uma nova carta de cada baralho.
- No caso de haver mais de dois jogadores disputando entre si, o jogo segue no sentido horário (para a direita).
- Quando as cartas do baralho acabarem, elas serão reabastecidas com as cartas já descartadas, e o baralho será embaralhado novamente.

Regras Especiais:

- Cartas de Domínio: Todas vêm com prefixo "*f*", representando o valor de *x*.
- Retrocesso: Se o valor calculado for negativo, o jogador move o peão para trás mesmo que esteja no início do jogo..
- As cartas jogadas (função e domínio) não retornam para a mão do jogador. Uma vez escolhidas e reveladas no tabuleiro, elas devem ser descartadas. O jogador deve obrigatoriamente andar o número de casas correspondente ao resultado obtido.

Regras do tabuleiro proposto:

- *f(u)* Na próxima rodada o jogador pode escolher qualquer valor de domínio sem que tenha o valor do domínio em mãos { *f(3) ; f(2); f(1); f(0) ; f(-1) ; f(-2) ; f(-3)*} e aplicar em uma carta de função de sua mão, depois de efetuada a jogada devolve a carta de função utilizada para o baralho e retira outra no lugar.
- *2f(x)* Na próxima rodada o jogador é obrigado a dobrar o resultado da função escolhida.
- $f(\frac{1}{2})$ e $f(-\frac{1}{2})$ Na próxima rodada o jogador é obrigado a escolher uma carta de função e substituir o valor do domínio, depois de efetuada a jogada devolve a carta de função utilizada para o baralho e retira outra no lugar.
- $f(x) = 0$ Perde a vez! O jogador não joga na próxima rodada.

Fim do Jogo:

Vence o jogador que completar primeiro o número de voltas combinadas no início da partida.

Um manual deste produto educacional foi produzido e disponibilizado no portal EDUCAPES (CANDIANI, 2026).

5 Relatos de experiências

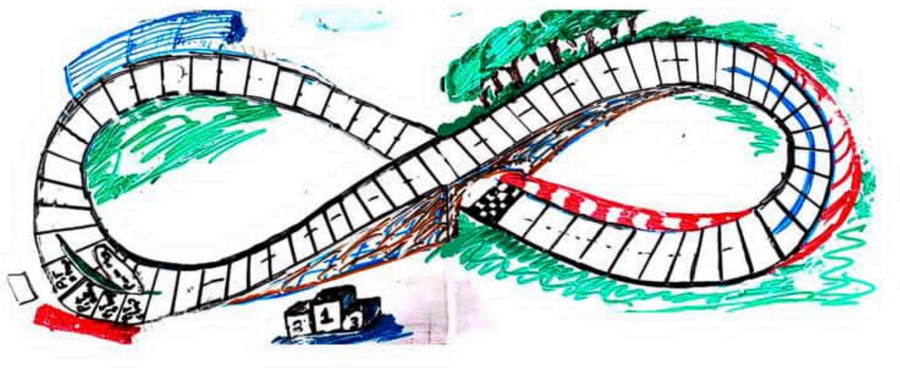
Contextualização das intervenções pedagógicas.

Neste capítulo serão descritas algumas experiências vivenciadas e reflexões vividas pelo autor em duas escolas do Estado de Minas Gerais, que serão denominadas como escolas A e B, para preservar a imagem das escolas. Na escola A, as intervenções ocorreram no 1º ano do Ensino Médio, em três turmas diferentes, sendo a turma I com 34 alunos, a II com 33 alunos e a III com 33 alunos. Na escola B, o jogo foi aplicado para turmas do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio, com 11, 10 e 12 alunos, respectivamente. O número de alunos é muito discrepante, pois a escola com turmas mais lotadas não aderiu ao período integral de estudos, a escola com poucos alunos é em tempo integral.

Desenvolvimento do material didático: criação dos tabuleiros.

Uma das etapas mais criativas do desenvolvimento durante as partidas nas escolas do jogo *Corrida das Funções* foi a construção dos tabuleiros pelos próprios alunos. Divididos em grupos, os estudantes tiveram total liberdade para aplicar sua criatividade na elaboração dos tabuleiros, o que resultou em formatos bem diversos e divertidos. A dinâmica começou com um desenho semelhante ao da Fotografia 22, feito por mim na lousa, para eles se inspirarem.

Fotografia 22 - inspiração de tabuleiro para os alunos.



Fonte: Do autor.

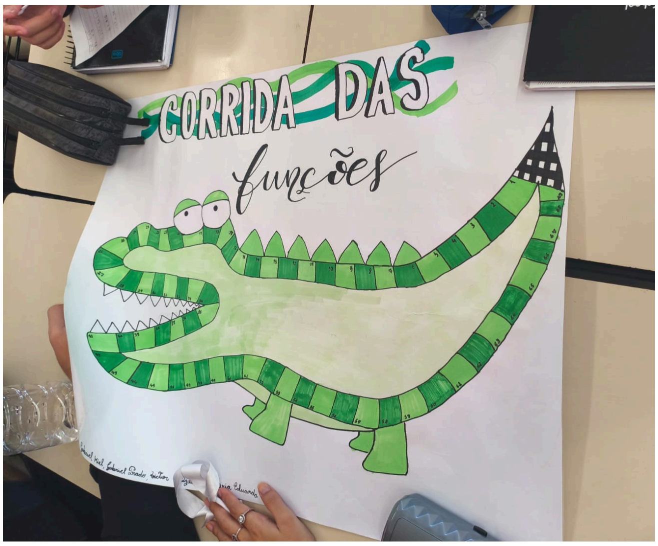
Os tabuleiros confeccionados deveriam seguir dois requisitos para dinamizar o jogo: O tabuleiro não poderia ter início e fim em pontos diferentes, facilitando a caminhada para frente e para trás, e o algarismo das unidades da última casa antes da chegada, deveria terminar em nove, devido o sistema decimal, em que a casa de início é a representação do 0 e também de outro número decimal, por exemplo o 100.

Alguns tabuleiros construídos pelos alunos tinham formas mais tradicionais, como quadrados e triângulos, enquanto outros eram mais inusitados, como em forma de estrelas, de tartarugas e até formatos que remetem a outros elementos da natureza. Aqui, serão expostos dois exemplos de trabalhos confeccionados pelos alunos, um da escola A e outro da escola B, conforme Fotografias 23 e 24, e no Apêndice A há mais trabalhos feitos por eles.

Fotografia 23 - Tabuleiro construído pelos alunos na escola A.

Fonte: Do autor.

Fotografia 24 - Tabuleiro construído pelos alunos na escola B.



Fonte: Do autor.

Como a ideia inicial era que os alunos participassem totalmente da criação do tabuleiro e das regras de sorte e revés da pista desenvolvida por eles, os alunos utilizaram muito da sua criatividade e foi o primeiro momento que deu para perceber a união na divisão de tarefas e na organização, seguindo o pensamento computacional, cada aluno ficava encarregado de algo. Desde as escritas do jogo até a pintura, foi possível perceber o pensamento computacional neste momento, pois, além de separar o que cada um iria fazer, eles tiveram que ter dois tipos de gestão de tempo: fazer o melhor possível para terminar nas duas aulas oferecidas, que evitaria o trabalho para casa e o respeito de esperar o outro terminar a tarefa para que pudesse cumprir a função designada.

Nesse momento, eles puderam escolher os grupos, a sugestão para a divisão em grupos foi que cada um tivesse de cinco a oito alunos, para que assim pudessem aproveitar a essa divisão para iniciar o jogo posteriormente. Os grupos puderam ser escolhido por eles como modo de se sentirem mais à vontade e motivados para realizar a atividade, mas foi explicado para que não ficassem apegados ao tabuleiro confeccionado pelo grupo já que tinha o objetivo de trocarem os tabuleiros entre salas, de forma que pudesse ser uma surpresa, as casas com regras especiais. Como mediador, fiquei observando a participação ativa de cada membro do grupo e anotando para que fosse atribuída uma nota para os alunos que estavam colaborando no trabalho.

Para os peões, eles utilizaram os materiais escolares deles, como tampa de canetas e chaveiros, conforme Fotografia 25.

Fotografia 25 - Tampas de canetas usadas como peões.

Fonte: Do autor.

Evolução do jogo: tabuleiro padronizado e peões em 3D.

Cada um dos processos tiveram momentos de desafios para o professor, sendo que um deles foi a necessidade de aprender a usar o software *Geogebra,* uma vez que todos os gráficos das funções que foram impressos nas cartas foram feitas nesse *software* e depois levados para outro para a formatação dessas cartas. Cada dia que se passava, era preciso aprender um novo comando e novas ferramentas digitais para que as cartas ficassem padronizadas. Isso exigiu que aprendesse sobre *Photoshop* e aplicativos de *design*. Já no final do processo de elaboração do jogo, o desafio foi na criação do tabuleiro, que exigiu tempo para que encontrasse as melhores proporções, jogo de cores e fontes para que, além de ser bonito, o tabuleiro fosse eficiente e útil no que tinha em mente para o jogo. Durante a impressão de tabuleiros, foi preciso teste em que se baseava em durabilidade e custo, o que fez com que conhecesse novos tipos de materiais e como funcionam as impressões gráficas.

Depois de aplicar o jogo em todas as turmas trocando os tabuleiros entre eles, os alunos utilizaram os tabuleiros pintados por eles do começo da intervenção pedagógica de julho até outubro, depois tive a ideia junto ao orientador de disponibilizar um modelo de tabuleiro, seguindo os padrões do esboço inicial conforme Figura 26, também disponibilizado no apêndice C.

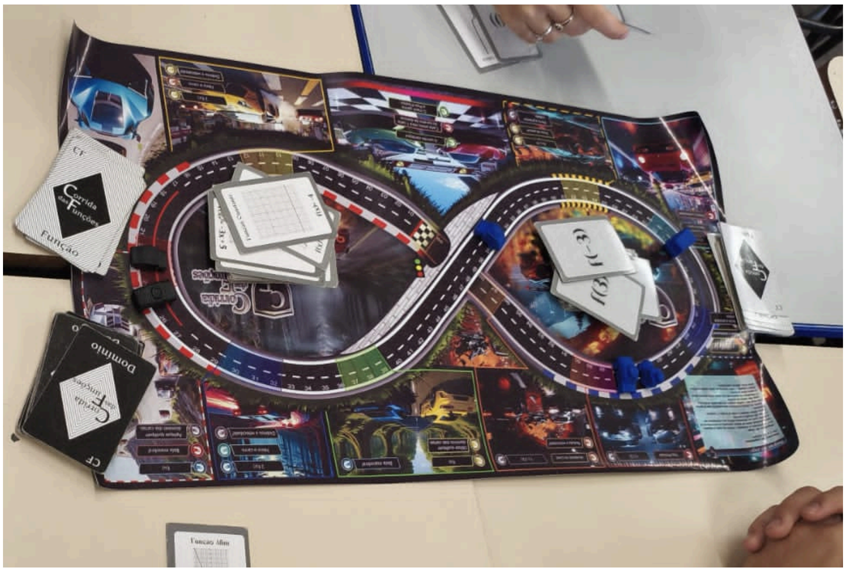
Figura 26 -Tabuleiro desenvolvido pelo autor

Fonte: Do autor.

Quando o material foi disponibilizado para os alunos, geraram novas percepções, pois os alunos ficaram empolgados com as regras desta pista, que estão descritas na parte “regras do tabuleiro proposto” . As reações foram diferentes da primeira proposta, uma vez que já tinham familiaridade com as regras gerais para o jogo. Com a chegada do novo tabuleiro, alguns comentários de alunos me chamaram a atenção, como: Um aluno da Escola B disse que o meu tabuleiro era mais complexo porque as regras de ação precisava de conhecimento matemático para resolver, diferente do “pule duas casas”, “perca a vez”; dois alunos da Escola A comentaram que gostavam de jogar no próprio tabuleiro que criaram, porque deu trabalho para fazer os desenhos, outro aluno da Escola B disse que gostou muito do tabuleiro, porque tinha ficado colorido e as casas decimais eram mais fáceis de serem visualizadas. A chegada do tabuleiro facilitou no transporte de uma sala para outra ou até mesmo para as intervenções em dias distintos, uma vez que os tabuleiros que os alunos confeccionaram eram feitos de papel e ficavam expostos a poeira e com riscos de amassar.

Assim, como o tabuleiro foi oferecido aos alunos, também foram criados os peões. Os peões foram construídos através de uma impressora 3D com a ajuda do aluno mencionado anteriormente. A situação em que foi combinado com o aluno de criar os carrinhos, foi um exemplo de protagonismo, pois, primeiramente, ele mostrou alguns trabalhos que fazia na impressora 3D, então pedi para que fizesse carrinhos de modelos diferentes. Durante a semana de produção, ele estava muito empolgado mostrando diferentes tipos de carrinhos que ele encontrou no aplicativo que já estavam vetorizados. No dia da entrega dos carrinhos, ele mostrou aos colegas com muito orgulho do trabalho que tinha feito e ainda explicou alguns detalhes do passo a passo de manipulação de uma impressora 3D, para chegar neste resultado conforme Fotografia 27.

Fotografia 27 - Peões 2ª versão de tabuleiro



Fonte: Do autor.

Oficina pedagógica no sábado letivo

Durante o sábado letivo do dia 12 de julho de 2025, das 7h às 11h , a Secretaria de Educação do Estado de Minas Gerais propôs que as escolas oferecessem oficinas voltadas para o ensino de Matemática em diferentes turmas e níveis de ensino. A oficina ocorreu na escola B, na qual o número de alunos é menor, incluindo Ensino Fundamental II e Ensino Médio, ambos os segmentos fazem parte do regime de estudos integral. Fiquei responsável pela criação da oficina destinada ao Ensino Médio, na qual organizei o torneio com o jogo *Corrida das Funções*. Além dessa oficina, havia outras, como xadrez, bingo da tabuada e tangram.

A oficina com o jogo *Corrida das Funções* contou com a participação de 12 alunos do Ensino Médio, fato não corriqueiro na rotina da escola, uma vez que aos sábados letivos a presença se dava majoritariamente por alunos do Ensino Fundamental II. Mesmo com a propaganda que os sábados letivos são aulas dinâmicas, diferentes e fora de sala de aula, não é comum que alunos do Ensino Médio compareçam à escola.

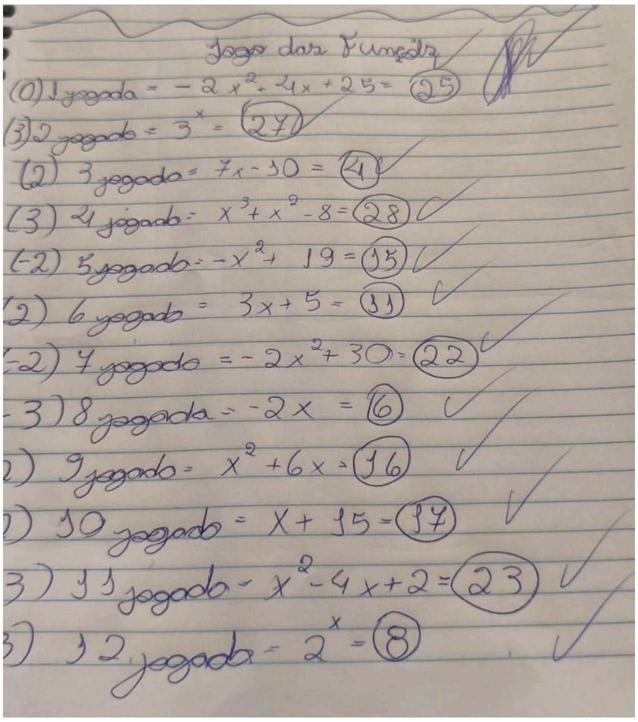
O início da aplicação foi uma extensão do que aconteceu durante a semana na escola em questão, mesmo que o público não era formado totalmente por meus alunos, houve uma continuidade, porque tiveram tabuleiros do jogo que foram confeccionados de segunda a sexta, da semana do sábado letivo, pelos próprios alunos, então bastava colocar em prática durante o jogo.

O sábado letivo foi dividido em dois torneios distintos. Um, antes do intervalo, e outro, depois do intervalo. A fim de ocorrer o primeiro torneio, antes do intervalo do recreio, foi pedido aos alunos que se dividissem em grupos e escolhessem algum dos tabuleiros disponíveis para que o jogo começasse. Como os alunos eram de professores diferentes, neste momento, os estudantes tinham ciência somente das regras do jogo que foi explicado por mim. Os meus alunos presentes não tinham nenhuma explicação ou revisão prévia do conteúdo matemático de funções e das ferramentas, uma vez que o conteúdo de funções não fazia parte do plano de curso do segundo bimestre, sugerido pelo governo como: potências, regras de sinais e expressões algébricas. Esses conteúdos são também necessários para o andamento do jogo e, por meio das jogadas foi possível identificar com clareza as principais dificuldades dos discentes em relação aos conceitos de função e o conhecimento prévio.

Nesse dia, foi possível perceber que as perguntas rodeavam as regras de sinais, principalmente quando a base da potência era um número inteiro negativo e poderia ser tanto expoente ímpar quanto um expoente par, mesmo que fosse repetido muitas vezes as regras de sinais, os alunos pediam para os professores que estavam presentes responderem. O que é interessante, pois os alunos que já estavam acostumados com a regra, respondiam aos colegas, promovendo interação e autonomia entre os estudantes de turmas variadas. A função "$f(x) =- 2x^2 + 4x + 25$" foi uma das funções que mais tiveram dúvidas, porque os alunos não sabiam em qual ordem resolver, a potência e a multiplicação. O conteúdo de expressões algébricas também foi outro desafio, pois eles esquecem partes dos monômios depois de resolvidos.

A partida começou com a retirada das cartas de domínio, para estabelecimento da ordem de jogo, como é citado nas regras. Já no começo do jogo alguns alunos foram escolhendo sua estratégia para ver qual combinação utilizam, demonstrando ânsia de registrar os cálculos. Como citado nas regras, foi explicado aos alunos a importância de registrar na folha de papel, jogada a jogada para encontrar os próprios erros e elucidar a caminhada na pista rumo a vitória, aplicando o número de domínio na função e em outros momentos realizando cálculos mentais conforme Fotografia 28.

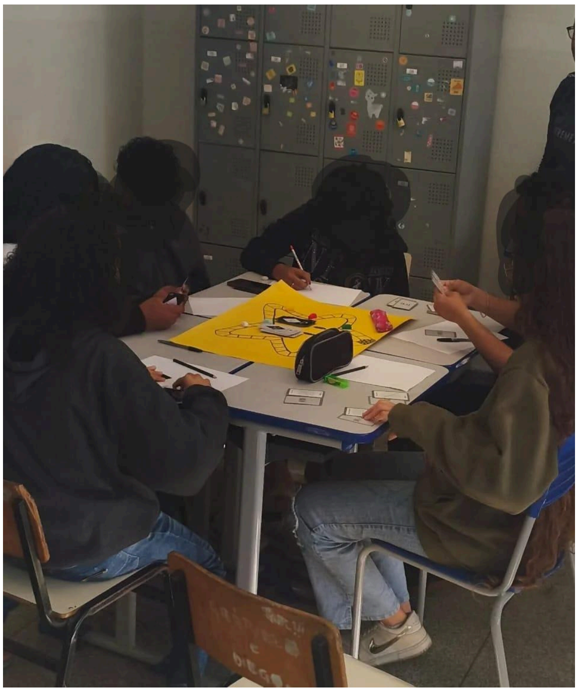
Fotografia 28 - Registro de alunos de jogadas durante o jogo



Fonte: Do autor.

Houve ainda aqueles que não haviam entendido o que estava sendo feito, relacionado às funções do jogo. Um exemplo de dúvida como “depois de substituir o valor de x, o x some?”, ”o que faz com o 2 que está antes do x”. Assim que os alunos começaram a aplicar seus conhecimentos matemáticos, surgiram dúvidas relacionadas a algumas funções. Logo, nas primeiras rodadas do jogo, foi possível perceber o envolvimento dos alunos na busca por estratégias para resolver as funções e na troca de informações. Ao depararem-se com os desafios das combinações das cartas, eles recorreram tanto ao professor quanto aos colegas, mesmo sendo adversários. Um exemplo da disposição dos alunos conforme Fotografia 29.

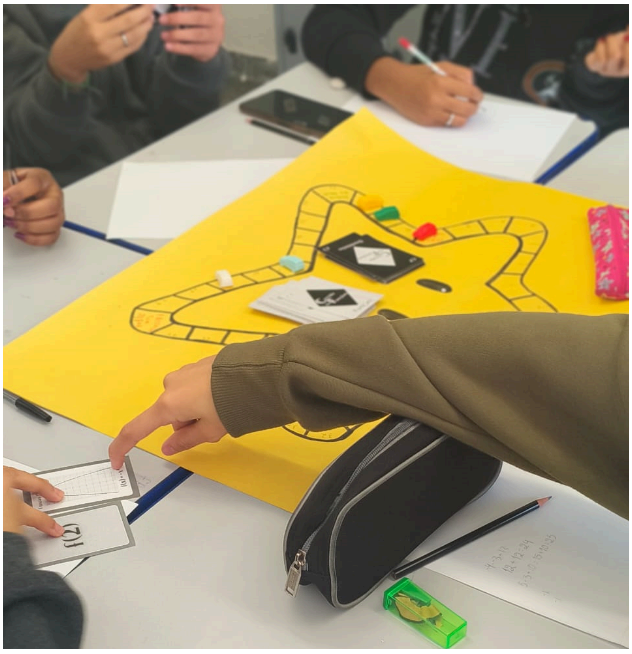
Figura 29 - Alunos participando da oficina



Fonte: Do autor.

Em várias situações, quando um estudante tinha dificuldade para calcular o valor de $f(x)$, para algum valor de x, ou encontrar a imagem de x por uma função f, ou interpretar o gráfico dessa função, outro colega prontamente se oferecia para ajudar, explicando o raciocínio e demonstrando o cálculo passo a passo. Entendo que essa troca de conhecimentos gerou um ambiente de aprendizagem solidário e participativo, em que o erro é visto como parte natural do processo de construção do saber, concordando com Vygotsky (1995), que destaca a importância do papel social e da linguagem como mediadores do aprendizado.

Fotografia 30 - Alunos participando da oficina.



Fonte: Do autor

A dúvida mais recorrente durante os relatos dos alunos foi perante aos cálculos de operações básicas envolvendo o conjunto dos números inteiros. Surgiram perguntas como "negativo com negativo resulta em positivo?". Outro exemplo é no caso da função $f(x) =- 3x + 5$, em que os alunos demoraram a entender porque era melhor ter uma carta cujo domínio é um número negativo do que uma carta com valores positivos. Outra confusão comumente vista foi os alunos não conseguirem manipular a expressão $f(x) = \ - 2x^2 + 30$, pois consideravam que todo número elevado ao quadrado é positivo, somando a potência resolvida com o 30, e ignorando o produto por $- \ 2$ da expressão da função. Outra dificuldade latente foi na função exponencial, em que os alunos não entendiam definições básicas, com grande defasagem em potenciação, principalmente quando a função era decrescente e/ou com domínio negativo, não conseguindo efetuar a operação. Corroborando com o que foi discutido sobre os conteúdos não consolidados dos anos anteriores.

Contudo, a primeira rodada do jogo teve como ganhadora uma aluna que fazia aniversário no dia, tecendo o comentário que estava duplamente feliz, pois saiu com a vitória no jogo que foi “presente mais que merecido” além do prêmio físico, que eram materiais fornecidos pela própria escola, como lápis, borrachas e canetas. Nesta situação, a aluna ganhou sozinha o prêmio, pois haviam poucos alunos jogando, então foram repartidos em apenas dois grupos. Trazendo considerações importantes que ambientes fora da sala de aula oferecem discussões pessoais e sadias, melhorando a relação aluno-professor, reforçando o que Vygotsky (1995) diz que o aprendizado se dá primeiramente no plano social, por meio da interação com indivíduos mais experientes, para depois internalizar.

No mesmo dia, houve um segundo torneio após o intervalo do recreio que teve algumas características que chamaram a atenção. Os professores de outras áreas, Geografia, Informática e Estudos Orientados também presentes no sábado letivo, resolveram entrar na brincadeira e jogar com os alunos. O primeiro impacto por parte dos alunos foram comentários como “como eles são adultos, eles vão vencer” e “eles já viram o conteúdo antes”. Mesmo com a maioria dos professores deixando claro que não tem facilidade com Matemática, o que foi significativo, eles permaneceram atentos e motivados durante todo o jogo, interagindo com os alunos e vivenciando a Matemática de forma lúdica. Desta forma, essa experiência despertou interesse até em docentes que normalmente não se envolvem com conteúdos matemáticos, gerando comentários positivos e reflexões sobre o uso de atividades lúdicas no ensino.

A coordenadora da escola elogiou a iniciativa depois da atividade aplicada, considerando o jogo uma atividade inovadora e estimulante, especialmente porque existem poucas ações envolventes dentro da escola e direcionadas aos alunos do Ensino Médio. Como educador, considero que foi uma experiência muito importante, pois foi possível avaliar através dos registros similares a Fotografia 28 os diferentes tipos de métricas utilizadas pelos alunos: em um ambiente colaborativo com trocas constantes entre os alunos e professores, reforçando conceitos das funções e culminando em um sábado letivo prazeroso e divertido.

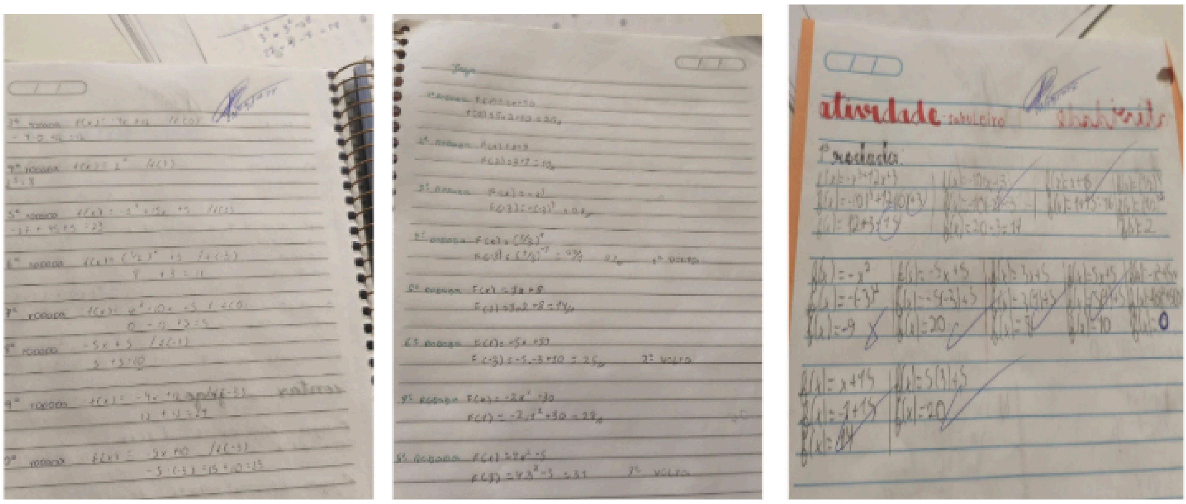
Fotografia 31 - Professor e alunos durante a aplicação da oficina

Fonte: Do autor.

Uso do jogo no cotidiano escolar

O início das intervenções com o jogo, deu-se após algumas aulas de funções. Então, nesta seção os relatos são seguindo o pressuposto que os alunos já haviam participado da aula desde o conceito até a substituição de valores de domínio das funções propostas. O único conteúdo que foi explicado durante as aulas que tinha o jogo e as regras do jogo, foi o conteúdo de gráfico de funções. A avaliação dos estudantes foi feita através dos registros da resolução das atividades, contando os acertos e erros conforme Fotografia 32.

Fotografia 32 - Registros das rodadas do jogo feito pelos alunos.



Fonte: Do autor.

No início, observei um certo receio por parte dos alunos, principalmente daqueles que não se sentem tão à vontade com a disciplina, nas duas escolas onde ocorreram as intervenções. Na Escola A, por ter um maior número de alunos, teve alunos que não queriam participar, mas a minha condução foi de que, como o conteúdo de funções faz parte do plano de curso do nível escolar do 1º ano, seria avaliado com pontuação, o que fez com que os estudantes encontrassem alguma forma de participar, mesmo que fosse de forma mais tímida. Por exemplo, durante a criação dos tabuleiros, ajudou somente com a pintura ou durante o jogo, com a organização e distribuição de cartas. Durante as aplicações do jogo na Escola A, as aulas eram turbulentas porque exigiam atenção difusa, de difícil análise tanto de quais eram as dúvidas relacionadas ao conteúdo quanto a participação ativa de cada estudante no grupo.

Todavia, na Escola B, como tem poucos alunos, todos eles ficaram muito empolgados na construção do tabuleiro e para começarem de fato a jogar. A quantidade de alunos impactou diretamente nas interações durante o jogo, pois, é mais fácil trabalhar com um público menor que é possível ouvir as opiniões de todos e também conhecer a personalidade da maioria dos estudantes do que com salas numerosas. Em critérios de avaliação, foi possível extrair mais informações e relatos com a Escola B devido a maior entrega de atenção que eu podia oferecer, bem como já conhecia as potenciais dificuldades individuais de cada aluno. Fazendo um comparativo entre escolas, mesmo que os alunos tenham mais dificuldades no começo das intervenções, foi possível notar que os da escola B conquistaram mais autonomia pessoal e em relação ao conteúdo de funções porque era possível tirar as dúvidas com maior detalhes. Na escola B, os discentes possuíam mais paciência para explicar situações entre eles, uma vez que a convivência é mais próxima.

No entanto, à medida que o jogo se desenrolava, o engajamento crescia. Foi notável a colaboração entre eles, auxiliando-se mutuamente na resolução dos desafios propostos pelas cartas. O trabalho em equipe tornou-se fundamental, com os alunos discutindo estratégias, como fazer as melhores combinações entre o domínio e a função e fixar os pares convenientes organizados juntos na mesa, citar que é melhor deixar cartas que vão "andar" muito para rodadas mais tardias, gastar o "*f(0)*" para não impactar as próximas rodadas, como deixar as cartas com menor número de domínio para esperar uma carta com uma função coerente, na maioria das vezes com sinais negativos. Tinha um estudante que quando se deparava com uma função exponencial não utilizava para não ter que pensar na resolução, porque entendia como uma função difícil de resolver.

As operações matemáticas, antes vistas com certo distanciamento, ganharam um novo significado, tornando-se ferramentas essenciais para alcançar a vitória.

É importante ressaltar que nem tudo foram flores. Alguns alunos "tropeçaram" em cálculos, erraram contas, mas isso só tornou o aprendizado mais rico. As regras de sinais eram constantemente revisitadas pelos estudantes e muitas vezes, compareciam com respostas erradas, mas com o tempo e a repetição, tanto minha e dos alunos que dominavam mais o conteúdo, passou a ser automático principalmente as regras de sinais de multiplicação para os números inteiros, uma vez que utilizavam arredondamentos de acordo com a ABNT, todas as respostas das funções são inteiras. Afinal, errar faz parte do processo, e o importante é aprender com os erros.

Um aluno destacou de forma que me chamou a atenção. Numa tentativa de ir na contramão no tabuleiro, acabou se deparando com um desafio ainda maior: as funções com valores negativos na imagem. Na primeira rodada, ele escolheu duas cartas a esmo em que a operação tinha alto valor de retrocesso no jogo, e como ato de rebeldia, decidiu manter com o percurso na contramão. Após algumas rodadas, quando ele recebeu as funções e os números de substituição na função ele já me perguntou se alguma teria uma combinação com resultado negativo. Nessas rodadas, não saiu nenhuma carta cujo número de imagem era negativo. Mesmo que neste jogo ele não conseguiu atingir o objetivo de completar as voltas combinadas com o grupo, seguindo o sentido anti horário, em outras oportunidades do jogo, ele continuou com objetivo de completar a volta na contramão, até que um dia ele conseguiu. Porém, os integrantes do grupo não aceitaram a vitória. Considerando a teoria das regras oficiais, a vitória não foi válida. O que poderia ter sido visto como rebeldia, na verdade se revelou uma oportunidade de ouro para ele se aprofundar ainda mais nos cálculos, porque teve dificuldade e recorreu ao auxílio do professor para conseguir terminar o jogo, o que pode ter sido considerado "rebeldia" transformou em um aprendizado. Nesse dia, foi gratificante observar como o jogo proporcionou um ambiente de aprendizado leve e divertido, onde o conhecimento foi construído de forma colaborativa. Sem dúvidas, fiquei mais incentivado a explorar ainda mais o potencial do jogo "Corrida das Funções" em minhas próximas aulas, aprofundando a análise de gráficos e explorando os domínios das funções de maneira ainda mais dinâmica.

Houve uma situação na Escola A em que uma equipe, na empolgação do jogo, um dos jogadores calculou um movimento de 48 casas, o que gerou um debate acalorado. Neste momento, um dos estudantes do grupo, pediu para que o professor fosse até a mesa para discussão do resultado correto. No caso, foi necessário intervenção para corrigir o cálculo da conta $f(x) =- 2x^2 + 30$, com x=3 , e teve que voltar 18 posições, garantindo que o jogo seguisse de forma justa.

Uma aluna da Escola A me procurou com dificuldade em realizar as operações de uma função e então eu expliquei como interpretar os gráficos presentes nas cartas. Aproveitei a oportunidade para explicar como fazer a leitura de um par ordenado do gráfico, obtendo o resultado sem precisar das operações, o que pode facilitar a compreensão das funções. Para minha surpresa, após ela entender a leitura dos gráficos, ela percebeu, que para ela, a leitura gráfica é muito mais fácil do que realizar as operações. Além disso, ensinou aos colegas do grupo em que estava jogando, contagiando todo o grupo a aderir ao método de leitura gráfica como estratégia.

Este movimento de leitura gráfica também aconteceu na Escola B, onde fui surpreendido quando uma aluna me perguntou o resultado de uma das funções e quando fui realizar o cálculo rápido e mentalmente inverti o sinal. Quando respondi para a aluna, outra aluna que estava ao lado, retrucou rapidamente e disse que o sinal estava errado porque dava para analisar no gráfico, então o resultado era negativo.

A aluna que me corrigiu foi uma aluna que realizou a prova de reclassificação no meio do ano, esta prova existe para as pessoas que embora tenham a idade, não estão no ano escolar que deveriam estar. Quando essa discente chegou, ela tinha muitas dúvidas em cálculos básicos e é lembrada por ser muito presente nas aulas e sempre tirar as dúvidas com os professores. Esta situação, fez com que a relação aluno professor se estreitasse, porque além de darmos risadas, as alunas fizeram piadas com o meu erro de cálculo e notou confiança da parte da aluna ao me corrigir. Foi um dia que me deixou feliz e realizado, porque ao mesmo tempo que errei, foi um termômetro de avaliação de aprendizagem.

Um fato que ocorreu durante estas atividadess é que nas turmas aplicadas tanto na Escola A, quanto na Escola B, fiz a experiência de deixar uma pessoa que fica somente para entregar as cartas, do lado "de fora" do jogo, e acaba auxiliando imparcialmente todos os estudantes e também aprendendo através da visualização. Embora não tenha sido escrita nas regras, pode ser uma estratégia utilizada pelo professor/mediador. Estes alunos, acabam realizando mais contas que os jogadores oficiais, uma vez que durante todas as partidas os questionamentos são verbalizados em voz alta. A medida tomada de colocar um aluno para distribuir as cartas, surgiu após comentários interessantes dos estudantes que além de jogar precisavam ficar atentos com estudantes que tinham tendência de trapacear, escolher maiores ou menores domínios dependendo da função que tinha na mão. Em alguns casos foi preciso intervir e conversar com os alunos sobre como a estratégia tem que vir do pensamento matemático e não da estratégia de trapaça.

Durante as aulas de Matemática em ambas escolas, fato mais recorrente na Escola A, devido às salas mais numerosas, foi observado que alguns alunos concluíam as atividades propostas mais rapidamente do que os demais. Para distrair esses alunos e otimizar o tempo de aprendizagem deles, sem prejudicar o andamento da turma, foi implementada a utilização do jogo educativo *Corrida das Fun*ções como atividade complementar para eles. Essa abordagem permitiu que os alunos que já haviam finalizado as tarefas permanecessem engajados, enquanto os demais continuavam realizando as atividades regulares de acordo com o plano de curso de Matemática. O jogo demonstrou-se uma ferramenta eficaz para manter a sala de aula equilibrada e produtiva, pois nas aulas com jogos era possível ensinar o conteúdo sem chamar tanta atenção relacionado ao mal comportamento dos estudantes e conseguir aproximar do maior número de alunos, com o conteúdo matemático propriamente dito. Enquanto os estudantes em desenvolvimento de tarefas seguindo os outros conteúdos do plano programático permaneciam concentrados, os estudantes mais avançados utilizavam o jogo para reforçar conceitos relacionados a domínio, imagem e interpretação de gráficos de funções, trabalhando os conceitos de forma indireta. Além disso, promoveu-se um ambiente de aprendizagem colaborativo e motivador, favorecendo tanto o engajamento individual quanto a interação entre colegas.

As atividades com o jogo também foram aplicadas nos segundo e terceiro anos do Ensino Médio, mesmo tratando de conteúdos de funções trabalhados no primeiro ano. Essa estratégia possibilitou a revisão e consolidação de conceitos previamente abordados, evitando o esquecimento de aprendizagem ao longo do tempo. O jogo no 3º ano foi utilizado como ferramenta para relaxamento, e de revisão de dúvidas de conteúdos como: regras de sinais, funções modulares e funções exponenciais, além de ferramenta indireta do conteúdo, aliviou a tensão para provas como o Enem e o SIMAVE. Já no 2º ano, apliquei o jogo com intuito recreativo e ferramenta direta, embora eles apresentaram mais facilidade, os erros consistem também em regras de sinais, mas o que mais chamou a atenção é que muitos desses alunos não lembravam conceitos e fundamentos de funções exponenciais.

O uso do *Geogebra* em sala de aula

Para a realização dessa atividade, levei os estudantes da Escola A e Escola B em seus respectivos horários para a sala de informática e apresentei o *GeoGebra*, que possibilita a construção de gráficos e a análise de funções. No início, ensinei como inserir corretamente as funções e como observar os seus gráficos. Em seguida, mostrei como utilizar o recurso de cálculo de valores, de forma que os grupos conseguissem relacionar cada valor do domínio (de -3 a 3) com a imagem correspondente. Os alunos puderam tanto lançar as funções no *Geogebra* quanto anotar as funções no caderno. No total, foram usadas cerca de 2 a 3 aulas para resolver todas as 350 associações possíveis no jogo, sendo 7 domínios diferentes para 50 lei de formações diferentes conforme a Fotografia 33.

Fotografia 33 - Resolução das funções

Fonte: Do autor.

Durante a atividade, observei que alguns grupos tiveram dificuldades iniciais, principalmente na inserção de funções que envolviam números negativos ou frações, para sanar esta dúvida, pedi para que todos os alunos, separassem em grupos nos computadores disponíveis para que todos pudessem ver o funcionamento do *Geogebra*. Em certos momentos, os alunos também se confundiram ao interpretar a leitura dos gráficos, sendo a maior dificuldade deles a de relacionar a imagem do gráfico formado e o par ordenado que representa, especialmente quando a função apresenta comportamento não linear. Os alunos conseguem encontrar os pontos no plano cartesiano, mas não conseguem enxergar o ponto quando tem a linha contínua do gráfico. No entanto, com o apoio do *GeoGebra* e a colaboração entre os colegas dentro do grupo, esses obstáculos foram sendo superados.

Um aspecto positivo foi perceber que o trabalho em grupo favoreceu a troca de ideias e a aprendizagem colaborativa. Enquanto alguns alunos demonstravam maior facilidade com a tecnologia, outros contribuem com a interpretação matemática, tornando a produção das tabelas mais dinâmica. Aos poucos, todos os grupos conseguiram organizar suas cartelas de respostas, registrando corretamente os pares de valores de domínio e imagem.

Ao final, as tabelas se tornaram um recurso importante para o jogo, funcionando como um gabarito construído coletivamente. Mais do que isso, a atividade foi significativa porque os alunos não apenas participaram do jogo, mas também se tornaram coautores do processo, vivenciando a matemática de forma prática, visual e colaborativa.

Avaliação da aprendizagem por meio do jogo

A avaliação do jogo *Corrida das Funções* foi realizada de forma contínua e processual, acompanhando todas as etapas de sua implementação, desde a construção dos tabuleiros até a aplicação do jogo em sala de aula. Inicialmente, eu avaliei a etapa de elaboração dos tabuleiros, o que esteve alinhada às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), concebendo a avaliação formativa e integrada às práticas pedagógicas. Foram observados aspectos relacionados à criatividade dos estudantes, a distribuição de tarefas entre a equipe e à mobilização de conceitos matemáticos ligados à organização e às proporções do espaço, como a divisão adequada das casas ao longo do percurso, a definição de escalas e a coerência do percurso numérico. Nesse processo, os alunos também elaboraram regras próprias para o jogo, as quais foram utilizadas como desafios distribuídos ao longo do percurso, de forma dinâmica.

Durante o desenvolvimento da atividade em sala de aula, realizei a avaliação por meio da observação sistemática das estratégias adotadas, da argumentação matemática apresentada e da comunicação de ideias, além de considerar aspectos atitudinais como participação, cooperação, protagonismo e respeito às regras, possibilitando uma visão ampla e integrada do processo de aprendizagem dos estudantes. Durante a aplicação do jogo, a avaliação ocorreu de forma formativa, por meio da observação direta das interações, das estratégias adotadas pelos estudantes, da argumentação matemática apresentada e da correta interpretação dos gráficos para a identificação da imagem da função e de seu comportamento (crescente ou decrescente). Além dos aspectos conceituais e procedimentais, também foram considerados elementos atitudinais, como participação, cooperação e respeito às regras, que me permitiu uma visão ampla do processo de aprendizagem dos alunos ao longo de toda a atividade.

Entretanto, os alunos tinham que anotar as operações jogada a jogada e deixar no caderno para que eu pudesse olhar os registros depois, como apresentados anteriormente neste trabalho. Para estas anotações, o crivo de correção foi utilizado: escrita correta de nomenclaturas de funções, operações básicas resolvidas corretamente, apresentação e organização dos registros e por último, resultado correto.

Em 3 de dezembro de 2025, na Escola B, o jogo foi utilizado como instrumento avaliativo alternativo. Em uma turma com poucos alunos, foi proposta uma rodada em que os estudantes deveriam registrar, de forma individual e detalhada, todas as resoluções matemáticas realizadas durante o jogo. Um dos alunos, em situação de recuperação, conseguiu resolver corretamente todas as jogadas, demonstrando a consolidação do conteúdo e dispensando a avaliação tradicional, uma vez que só faltava um ponto para atingir a média escolar de 60 pontos, que aconteceu da seguinte maneira:

1º aula: depois da intervenção pedagógica (fim do ano, poucos alunos) que foi uma prova convencional, com perguntas e respostas sobre o conteúdo do bimestre/semestre somente três alunos jogaram: havia um aluno que precisava de apenas um ponto e a proposta foi que jogassem para que não precisasse fazer a prova de recuperação. Para que acontecesse, a rodada de jogo precisaria de, no mínimo, 3 alunos e os outros alunos que jogaram não precisavam mais de nota, em prol que o aluno conseguisse o ponto que faltava. O intuito desta intervenção foi analisar através do jogo se o conteúdo tinha sido consolidado, e o registro desta avaliação foi por meio de uma folha em branco. A cada jogada que o estudante fazia, eu pedia para que ele fizesse as anotações da resolução da função, sem pedir a ajuda dos colegas e que anotasse a resolução na folha, detalhadamente, utilizando todas as cartas de domínio que tinha em mãos. O aluno que precisava de nota conseguiu acertar todas as respostas, evitando a avaliação convencional.

2º aula: Ainda na Escola B, a aula iniciou com o jogo, tinha 6 alunos, o que deu maior liberdade para o mediador perceber as dificuldades e potencialidades do jogo, a premiação foi de um ponto para todos que realizaram todos os cálculos corretamente. Usando nomes fictícios; o Tiago que conhece mais o jogo. O Fabiano, que tem dificuldades com o jogo, começou a desfazer do jogo, porém ele estava com boas cartas e, com a sorte e com o auxílio dos colegas ao lado, começou a ganhar.

A experiência evidenciou o potencial do jogo como ferramenta de avaliação formativa, possibilitando observar raciocínio, autonomia e domínio conceitual em um ambiente menos formal.

Jogos e inclusão educacional

No estado de Minas Gerais alunos com deficiências cognitivas e físicas, têm direito a um professor de apoio de acordo com lei nº 13.146/2015 e a política nacional de educação especial, além de legislação estadual e municipal, como a Resolução SEE nº 4.256/2020 (Minas Gerais, 2020). Dito isso, há alunos que têm acompanhamento de uma professora de apoio e, durante as intervenções dos jogos, a preocupação foi de primeiro ensinar a professora de apoio, que neste caso, não gosta muito de matemática, mas foi muito solícita para aprender as regras do jogo, para que assim usasse de sua formação e métodos pedagógicos especializado ao aluno.

Esse relato é de uma trajetória emocionante da Escola A da qual uma professora de apoio ensinou ao aluno com deficiência cognitiva leve a jogar. No começo ela o auxiliava com comandos e houve situações em que este aluno sentia-se confortável em jogar somente com a professora do apoio, como foi relatado pela própria professora de apoio. Nas outras vezes ele criou independência para jogar sozinho, sendo que em uma aula esse aluno estava jogando com outros colegas e ele venceu uma partida, não precisando de auxílio. Foi nítida a alegria e comemoração do discente ao contar para os outros colegas que havia vencido. Em vez de pedir para que ele realizasse cálculos complexos, a proposta foi de um jogo mais prático: ele escolhia um valor de x e uma função f e, com isso, ia anotando a imagem, ou o valor de $f(x)$ correspondente. Dessa forma, ele conseguia se ambientar com o conceito de função de uma maneira mais leve e didática de forma que o aluno sentia-se incluído em jogar com outros colegas. Essa adaptação permitiu que ele participasse ativamente, sem se sentir sobrecarregado, e, ainda assim, contribuiu para o entendimento do conteúdo de forma inclusiva.

Na Escola A, também um dos momentos mais marcantes foi a participação de um aluno que costuma se isolar nas atividades. Ele se entregou ao jogo, interagindo com os colegas e demonstrando um raciocínio rápido e perspicaz. Até mesmo os mais resistentes se renderam à dinâmica do jogo, e pude testemunhar o brilho nos olhos de um aluno de inclusão ao vencer a partida. Acredito que o ponto alto da atividade foi a forma natural com que os alunos começaram a aplicar os conceitos de função para traçar suas estratégias de jogo.

Na escola B, o jogo foi adaptado para a aplicação para dois alunos de inclusão, que têm deficiências cognitivas severas e, apesar da idade, estão em fase de alfabetização. Nas outras atividades voltada para alunos com necessidades de inclusão durante o cotidiano escolar, percebi que a dinâmica do jogo Corrida da Função precisava ser adaptada. Recorri a professora de apoio, a qual professora me informou que o aluno tinha algumas dificuldades de interpretação, então decidi simplificar a atividade, então o ofereci um dado para trabalhar contagem e números dentro da matemática. Desse modo, a professora de apoio que o acompanhava e jogava com os alunos precisava jogar somente com um dado, pois não conseguia contar mais que cinco unidades.

6 Reflexões e considerações

A experiência vivenciada no processo de desenvolvimento e aplicação do jogo *Corrida das Funções*, durante a condução das aulas e o trabalho com os conteúdos matemáticos relacionados ao estudo de funções, previstos no plano de curso do 1º ano do Ensino Médio e articulados aos temas do jogo, pode ser compreendida, especialmente no momento da aplicação, como um espaço de troca de conhecimentos na relação aluno-professor e aluno-aluno. Nesse contexto, cabe destacar que a ludicidade desempenha um papel fundamental no desenvolvimento das competências relacionadas ao aprender a ser, aprender a conviver, aprender a conhecer e aprender a fazer, conforme aponta Grando (2004). O jogo favorece a concentração, a socialização, a criatividade e a aceitação das perdas, permitindo que os alunos explorem suas potencialidades de maneira espontânea e significativa, bem como reconheçam os desafios e situações de insucesso como oportunidades de aprendizagem.

Nas salas de aula, o jogo *Corrida das Funções* proporcionou momentos diversos. Desde as primeiras apresentações, observou-se grande empolgação e envolvimento das turmas e das escolas em que atuo. Destaca-se, nesse ponto, a colaboração entre os estudantes, que promoveu uma troca de ideias capaz de favorecer o desenvolvimento de um pensamento crítico cada vez mais objetivo, conforme defende a BNCC (Brasil, 2018).

Como professor, percebi que os alunos podem ser facilmente motivados por desafios, desde que estes sejam acompanhados de conversas e diálogos. Não basta apenas desafiar o aluno e recompensá-lo; é necessário explicitar que se trata de um desafio, que ele possui capacidade para resolvê-lo e que as recompensas são consequências de vitórias pessoais. Esse processo exige equilíbrio, pois é possível propor tarefas complexas desde que estejam coerentes com aquilo que os alunos vêm aprendendo, princípio defendido pela metodologia da resolução de problemas (Júnior, Onuchic, 2015) e presente em todos os eixos da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Em relação ao público da educação especial e inclusiva, pode-se destacar que os momentos de aplicação do jogo foram de grande aprendizado e emoção pessoal. Ver o jogo sendo utilizado por todos os alunos, sem distinção, e presenciar a vitória de um aluno da inclusão trouxe uma forte sensibilidade emocional e a percepção de que parte do objetivo principal da criação do jogo havia sido alcançada. Isso reforça a ideia de que diferentes grupos de estudantes podem ser incluídos no contexto de ensino e aprendizagem de matemática, valorizando-se a individualidade e seus conhecimentos prévios.

Outro aspecto positivo foi perceber que o trabalho em grupo favoreceu a troca de ideias e a aprendizagem colaborativa. A criança passa a ser social quando está envolvida em um jogo, o que gera impactos não apenas na infância, mas também na adolescência e na vida adulta. Isso ocorre porque o jogo envolve o ato de brincar com regras previamente estabelecidas, exigindo controle mútuo e autorregulação. Essa vivência evidencia a importância de saber conviver com os colegas ao longo de toda a vida, independentemente da fase em que se esteja, seja no ambiente de trabalho, em casa ou em práticas sociais, de consumo, comércio ou lazer.

Da mesma forma, Grando (2004) destaca que o jogo é um objeto cultural e uma atividade cujo fim é o próprio prazer que proporciona, independentemente da idade. Essa perspectiva reforça a ideia de que atividades lúdicas, como a *Corrida das Funções*, não apenas auxiliam no ensino de conteúdos matemáticos, mas também contribuem para o desenvolvimento de habilidades sociais, cognitivas e estratégicas, promovendo uma aprendizagem mais rica e duradoura.

O jogo proporcionou momentos de intenso diálogo e diversão tanto para o professor quanto para os alunos. As aulas posteriores, relacionadas a outros conteúdos, tornaram-se mais fáceis de serem ministradas, pois havia maior entrosamento entre professor e estudantes. Foi possível identificar diferentes talentos entre os alunos e comparar aqueles que obtêm bons resultados em avaliações escritas com aqueles que se expressam melhor e apresentam melhor desempenho em atividades lúdicas e práticas.

Ao integrar conceitos matemáticos a um formato lúdico e competitivo, compreendemos que o uso do jogo em sala de aula auxiliou os alunos a experimentar, refletir e utilizar os conteúdos de forma prática, contribuindo para a consolidação das aprendizagens. Além disso, a cooperação entre os estudantes e a participação ativa de professores de diferentes áreas evidenciaram que a ludicidade pode ser uma ferramenta potente de engajamento e motivação para toda a comunidade escolar, tornando o ensino de Matemática mais compreensível e prazeroso.

Em contrapartida, o processo de escrita deste trabalho mostrou-se desafiador. Em uma reflexão pessoal, os anos de atuação em sala de aula fazem com que algumas habilidades importantes para a formação docente, adquiridas em cursos e formações, acabem sendo deixadas de lado, entre elas a prática da escrita acadêmica e da formalização de textos dissertativos. Apesar de todas as intervenções terem sido extremamente enriquecedoras, foi um desafio transpor para o papel, com o mesmo nível de riqueza, as reflexões que surgiam na oralidade, nos registros e nas anotações realizadas ao longo do processo. A escrita desse trabalho possibilitou a leitura de mais produções acadêmicas, favorecendo a compreensão do que já foi estudado sobre os temas abordados e evidenciando que a leitura, a reflexão, a escrita e a reescrita permitem organizar os fatos de forma mais clara e consistente.

A realização de toda a intervenção pedagógica por meio do jogo apresentou mais pontos positivos do que negativos. Embora seja possível observar que a maioria dos alunos consolidou os conteúdos relacionados a funções, substituição de variáveis e classificação de gráficos, o planejamento semestral precisou ser ajustado, demandando mais tempo do que seria utilizado em aulas expositivas e dialogadas. Como consequência, outros conteúdos foram trabalhados em menos aulas, porém com alunos apresentando uma bagagem conceitual mais consistente.

Em síntese, a implementação do jogo *Corrida das Funções* possibilitou a diferenciação pedagógica, permitindo que alunos mais avançados fossem desafiados, enquanto os demais mantinham o foco em suas tarefas. Paralelamente, a estratégia contribuiu para a revisão de conteúdos previamente trabalhados, fortalecendo a retenção de conceitos matemáticos essenciais. Assim, compreende-se que o jogo não apenas auxiliou na consolidação de conceitos de funções e operações básicas, mas também promoveu cooperação, estratégia, engajamento e motivação, revelando-se uma ferramenta pedagógica valiosa para o Ensino Médio, capaz de aproximar teoria e prática e tornar a aprendizagem uma experiência lúdica e colaborativa.

Por fim, o jogo trouxe importantes lições para minha trajetória profissional. Pretendo ampliar o uso de jogos em diferentes conteúdos e continuar utilizando a *Corrida das Funções* em minhas turmas, especialmente no 1º ano do Ensino Médio. Como perspectivas de aprimoramento, planeja-se ampliar o número de cartas de domínio, a fim de trabalhar com maior ênfase os números racionais nas formas fracionária e decimal. Em relação às funções, pretende-se abordar cada tipo em momentos distintos, iniciando pelas funções afins e, posteriormente, pelas funções quadráticas, seguindo a organização proposta neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). **Diário Oficial da União,** Brasília, DF, 7 jul. 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br. Acesso em: 20 jan. 2026.

BRASIL. Ministério da Educação. ***Base Nacional Comum Curricular.*** Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 13 ago. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Computação na Educação Básica: Complemento à BNCC.** Brasília, DF: MEC, 2022. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/noticias/computacao-na-educacao-basica-complemento-a-bncc. Acesso em: 13 ago. 2025.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J.R.; SOUSA, P. R. Câmara de. **Prisma matemática: Conjuntos e funções**: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J.R.; SOUSA, P. R. Câmara de. **Prisma matemática: Funções e progressões: ensino médio**: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias. 1. ed. São Paulo: FTD, 2020.

BOURBAKI, Nicolas. **Elements of the history of mathematics**. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

CANDIANI, A. L. Corrida das Funções, Produto Educacional, EDUCAPES, 2026. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc.php. Acesso em: 31 de mar. 2026

DALARMI, T. T. **O uso de jogos nas aulas de matemática**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/XIENEM/pdf/1291_432_ID.pdf. Acesso em: 10 dez. 2025

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FERREIRA, W. C.; SANT'ANA, C.C. Jogos de Matemática no Scratch: relato de um minicurso promovido com vistas a contribuir com a formação docente. **Educação Matemática em Revista**, *[S. l.]*, v. 30, n. 86, p. 1–17, 2025. DOI: 10.37001/emr.v30i86.4227. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/4227. Acesso em: 3 fev. 2026.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos no ensino da matemática. In: FIORENTINI, Dario (org.). **Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares.** Campinas: Mercado de Letras, 1995

GRANDO, R. C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

GRANDO, R. C. Recursos didáticos na Educação Matemática: jogos e materiais manipulativos. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 5, n. 2, p. 393-416, 2015.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. GeoGebra: **software para ensino e aprendizagem de matemática.** Disponível em: https://www.geogebra.org/ . Acesso em: 10 de jan. 2026.

IEZZI, G. MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar,** 1: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

JUNIOR, L.C.L.; ONUCHIC, L. R. Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista. **Bolema,** Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 955-978. 2015.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado de Educação. Resolução SEE nº 4.256, de 7 de janeiro de 2020. Estabelece normas para a organização da educação especial na rede estadual de ensino. **Diário Oficial do Estado de Minas Gerais**, Belo Horizonte, 8 jan. 2020. Disponível em: https://www.iof.mg.gov.br. Acesso em: 12 fev. 2026

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS (ONU). **Transformando Nosso Mundo: a Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável.** 2015. Disponível em: https://nacoesunidas.org/pos2015/agenda2030/. Acesso em: 14 de jan 2026.

PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Imagens digitais e matrizes. **Gazeta de Matemática**, n. 169, p. 44-48. Disponível em: https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=407. Acesso em: 03 jan. 2026.

PINTO, L. **Situações desencadeadoras de aprendizagem em um jogo protagonizado para o ensino de geometria.** 2023. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/server/api/core/bitstreams/5619b526-c45b-417e-9a89-58669aa312f4/content. Acesso em: 15 jan 2026.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

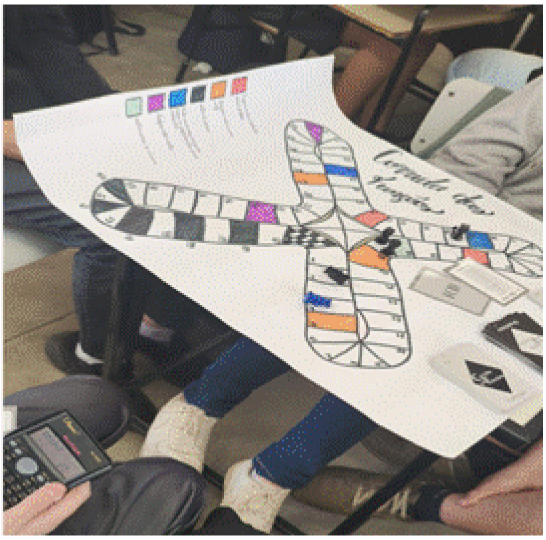
STEIGENBERGER, A. L., **Diálogo : matemática e suas tecnologias** : manual do professor 1. ed. São Paulo : Moderna, 2020.

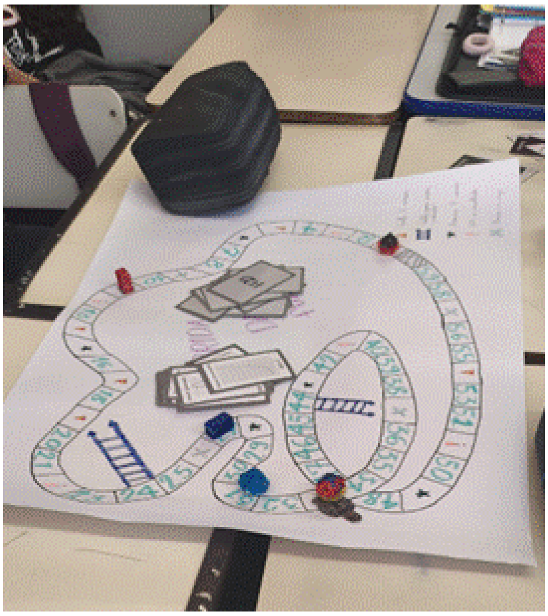
STRAPASON, C. C.; BISOGNIN, E. L. Jogos pedagógicos para o ensino de funções no primeiro ano do Ensino Médio. **Bolema**, v. 33, n. 64, p. 1264–1286, 2019.

VYGOTSKY, L.S. **Obras escolhi III: problemas do desenvolvimento da psique.** Madrid: Visor, 1995.

Apêndice

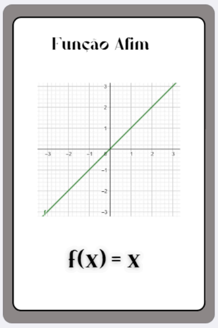
APÊNDICE A – TABULEIROS PRODUZIDOS PELOS ESTUDANTES



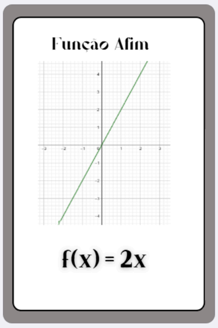



Corrida das

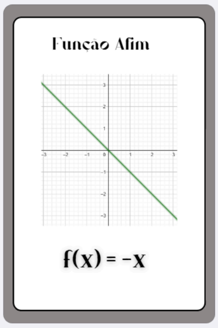
APÊNDICE B– O PRODUTO EDUCACIONAL



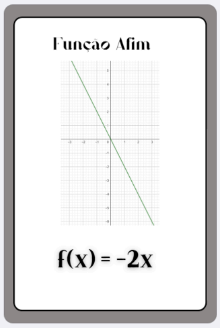
1



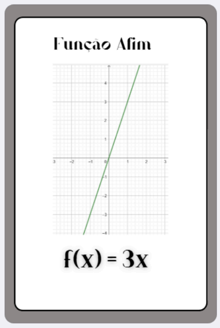
2



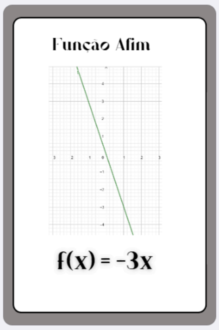
3



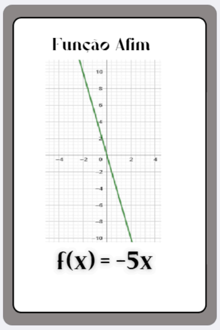
4



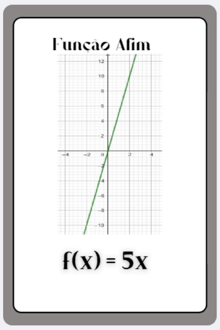
5



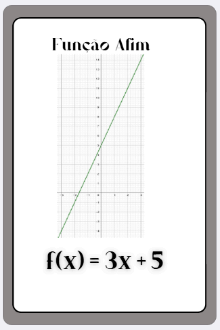
6



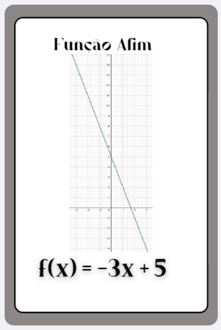
7



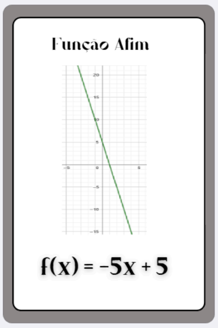
8



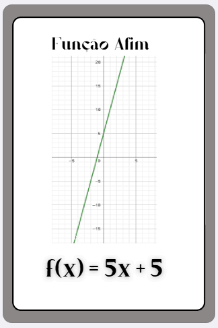
9



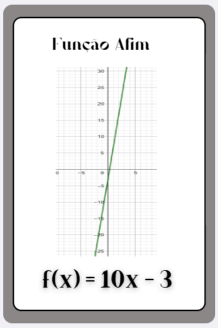
10



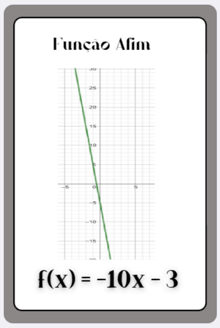
11



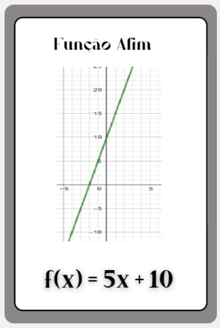
12



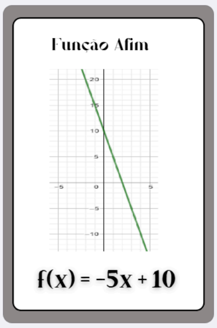
13



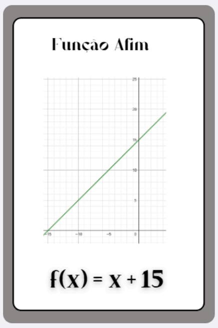
14



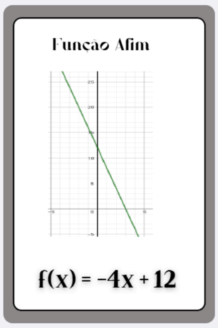
15



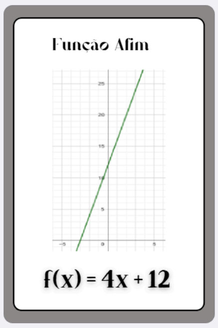
16



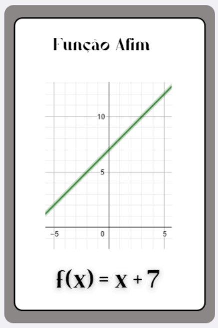
17



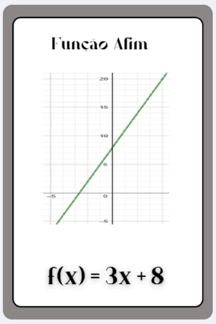
18



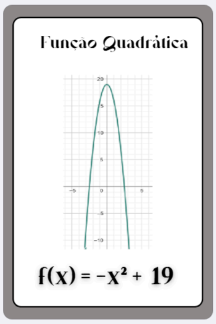
19



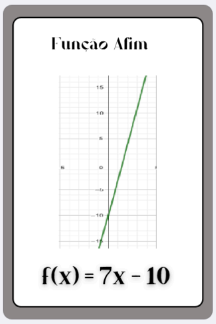
20



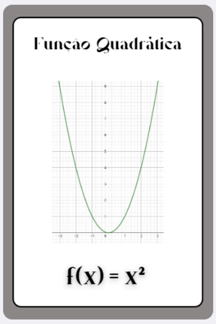
21



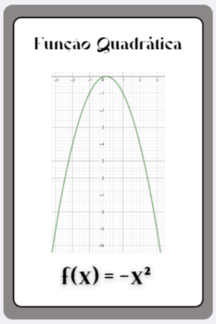
22



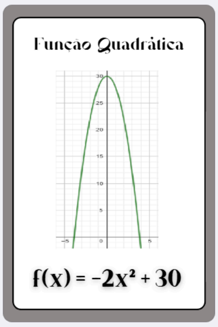
23



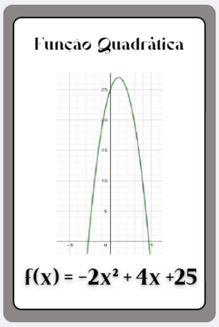
24



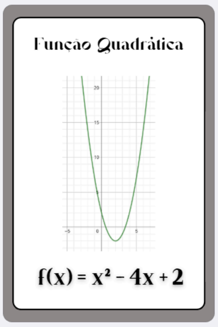
25



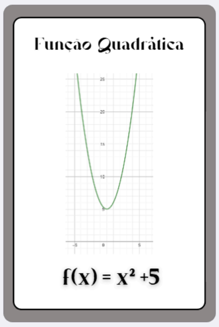
26



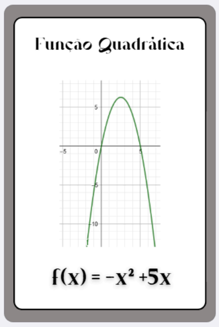
27



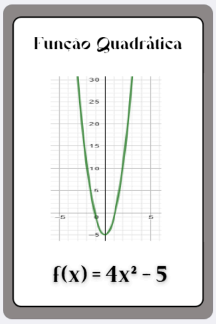
28



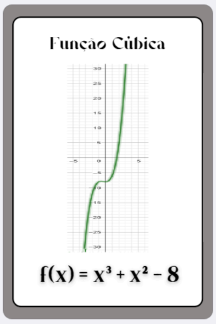
29



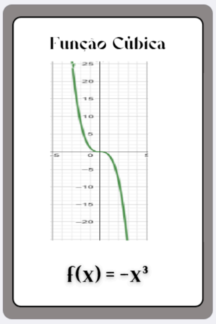
30



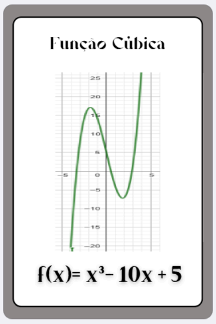
31



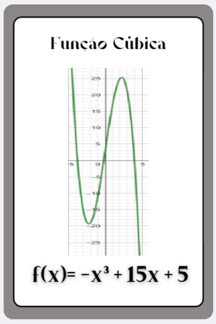
32



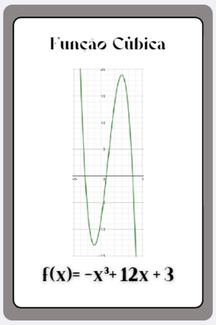
33



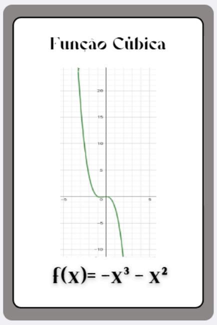
34



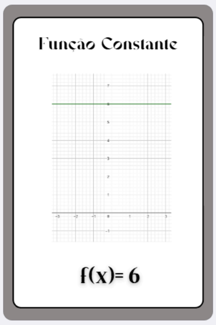
35



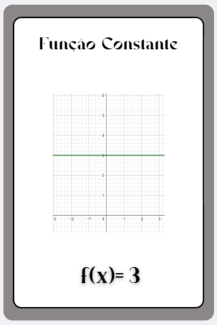
36



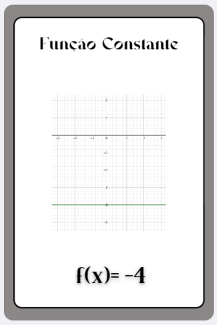
37



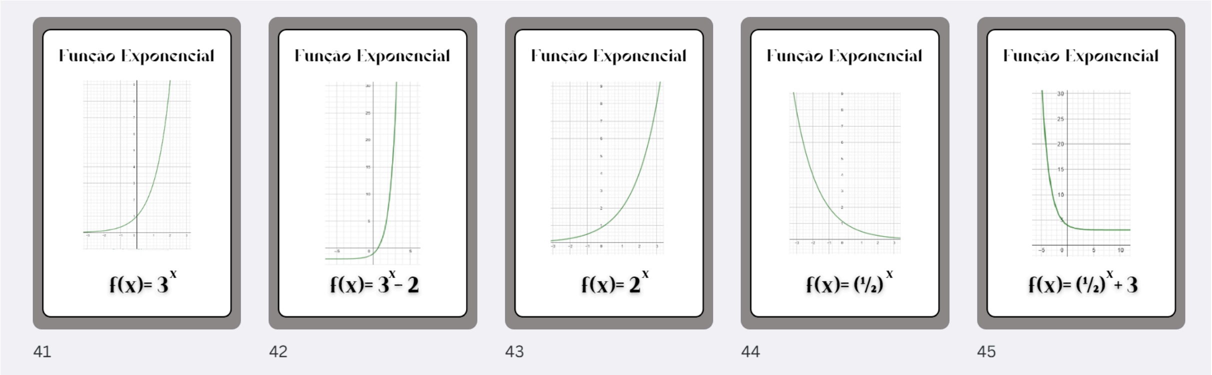
38

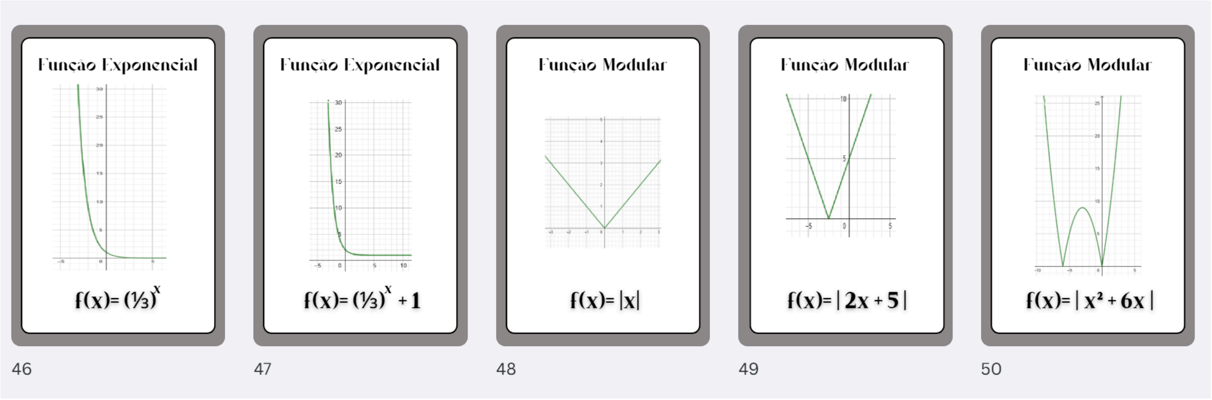


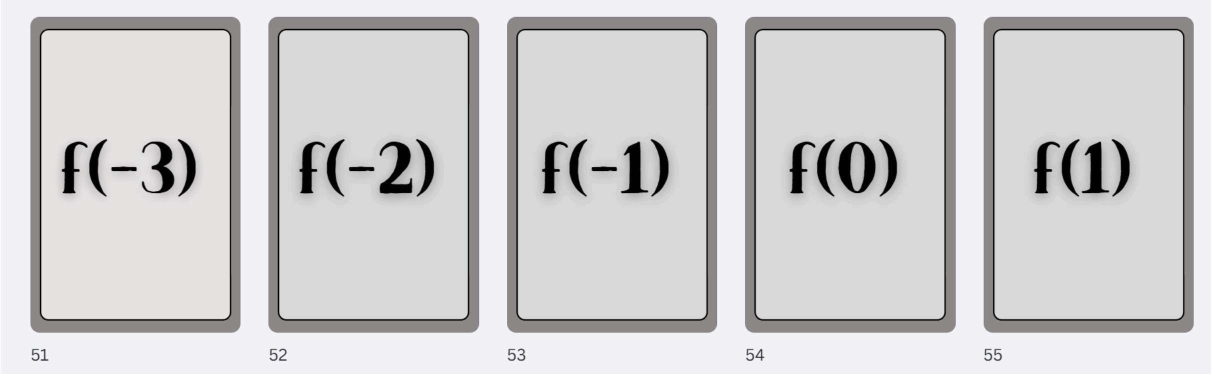
39

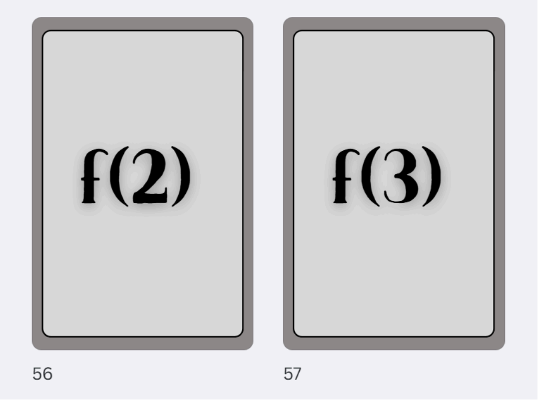


40


Função Exponencial
$f(x) = 3^x$
Função Exponencial
$f(x) = 3^x - 2$
Função Exponencial
$f(x) = 2^x$
Função Exponencial
$f(x) = (1/2)^x$
Função Exponencial
$f(x) = (1/2)^x + 3$
41
42
43
44
45


Função Exponencial
$f(x) = (1/3)^x$
Função Exponencial
$f(x) = (1/3)^x + 1$
Função Modular
$f(x) = |x|$
Função Modular
$f(x) = |2x + 5|$
Função Modular
$f(x) = |x^2 + 6x|$
46
47
48
49
50


f(-3)
f(-2)
f(-1)
f(0)
f(1)
51
52
53
54
55


f(2)
f(3)
56
57

APÊNDICE C– TABULEIRO PROPOSTO.

APÊNDICE D– REGRAS.

Número de jogadores: Mínimo 2 jogadores por partida. Ideal 6 jogadores. Máximo 10 jogadores. Cada peão pode ser jogado individualmente ou em duplas.

Objetivo do Jogo: Ser o primeiro a completar o número de voltas no sentido crescente da numeração do trajeto combinado previamente.

Materiais Necessários:
Baralho de Funções: Cartas com expressões como: $f(x) = 2x$, $f(x) = x^2 + 5$, bloco de papel e caneta.

Tabuleiro: Formato de pista (como um circuito), fazendo alusão às corridas e com potencial de gerir o tempo, gastando mais ou menos tempos de acordo com a disponibilidade do professor, uma vez que pode-se dar muitas voltas. Como tem a opção de criação de tabuleiro pelo próprio aluno, surgiram regras na própria pista de sorte e revés, com casas numeradas sequencialmente, por exemplo de 1 a 100. Uma possibilidade é que cada grupo produza seu próprio tabuleiro ou que seja o modelo padrão já impresso.

Fase 1 — Definindo Quem Começa:

- Com o baralho já embaralhado, cada jogador (ou cada dupla) retira uma carta do baralho de domínio.
- O jogador que pegar o maior valor à esmo {ex: $f(3) > f(2) > f(1) > f(0) > f(-1) > f(-2) > f(-3)$} começa, em que $f(x)=x$ é a função identidade. Em caso de empate, os jogadores empatados retiram novas cartas até haver um vencedor.
- As cartas são devolvidas ao baralho e ele é embaralhado novamente.

Fase 2 — Preparação:

- Cada jogador retira 3 cartas de função e 3 cartas de domínio, de cada baralho, na ordem determinada antes.
- Todos posicionam seus peões na casa de partida quadriculada.

- O número de voltas a ser completado no tabuleiro é combinado previamente (ex: 1, 2 ou mais voltas) ou o professor pode estabelecer um tempo de jogo, e quando acabar o tempo, o jogador que estiver na casa de maior número e com o maior número de voltas completas, vence a partida.

Fase 3 — Jogando:

- Na sua vez, o jogador escolhe uma das suas cartas de função e uma das suas cartas de domínio.
- Substitui o valor de x (da carta de domínio) na função. Exemplo: $f(x) = x^2 + 5$ e carta $f(-2)$. Então calcula $f(-2) = (-2)^2 +5 = 4 +5 = 9$.
- O valor obtido para $f(x)$ indica quantas casas o peão deve se mover:
- Resultado positivo: avança.
- Resultado negativo: retrocede.
- Se o resultado não for inteiro: arredondar para o inteiro mais próximo seguindo as normas da ABNT 5891 de 2014. Exemplo: $f(x)= 2,6$ e $f(x)= 3,4$ andar 3 casas para frente. Para o caso de $f(x)= 3,5$ ou $f(x)= 4,5$ anda 4 casas porque aproxima para o número par.
- Após a jogada, o jogador descarta as duas cartas usadas e retira uma nova carta de cada baralho.
- No caso de haver mais de dois jogadores disputando entre si, o jogo segue no sentido horário (para a direita).
- Quando as cartas do baralho acabarem, elas serão reabastecidas com as cartas já descartadas, e o baralho será embaralhado novamente.

Regras Especiais:

- Cartas de Domínio: Todas vêm com prefixo "*f*", representando o valor de *x*.
- Retrocesso: Se o valor calculado for negativo, o jogador move o peão para trás mesmo que esteja no início do jogo..
- As cartas jogadas (função e domínio) não retornam para a mão do jogador. Uma vez escolhidas e reveladas no tabuleiro, elas devem ser descartadas. O jogador deve obrigatoriamente andar o número de casas correspondente ao resultado obtido.

Regras do tabuleiro proposto:

- *f(u)* Na próxima rodada o jogador pode escolher qualquer valor de domínio sem que tenha o valor do domínio em mãos { *f(3) ; f(2); f(1); f(0) ; f(-1) ; f(-2) ; f(-3)*} e aplicar em uma carta de função de sua mão, depois de efetuada a jogada devolve a carta de função utilizada para o baralho e retira outra no lugar.
- *2f(x)* Na próxima rodada o jogador é obrigado a dobrar o resultado da função escolhida.
- $f(\frac{1}{2})$ e $f(-\frac{1}{2})$ Na próxima rodada o jogador é obrigado a escolher uma carta de função e substituir o valor do domínio, depois de efetuada a jogada devolve a carta de função utilizada para o baralho e retira outra no lugar.
- $f(x) = 0$ Perde a vez! O jogador não joga na próxima rodada.

Fim do Jogo:
Vence o jogador que completar primeiro o número de voltas combinadas no início da partida.