

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

GERSON GIANINI GARCIA DO NASCIMENTO

BURACOS NEGROS EM RG E GRAVIDADE MODIFICADA

POÇOS DE CALDAS/MG

2025

GERSON GIANINNI GARCIA DO NASCIMENTO

BURACOS NEGROS EM RG E GRAVIDADE MODIFICADA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal de Alfenas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto

POÇOS DE CALDAS/MG

2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca Campus Poços de Caldas

Nascimento, Gerson Gianinni Garcia do.

Buracos negros em rg e gravidade modificada / Gerson Gianinni Garcia do Nascimento. - Poços de Caldas, MG, 2025.

49 f. : il. -

Orientador(a): Rodrigo Rocha Cuzinato.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia) - Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, 2025.

Bibliografia.

1. Buracos Negros. 2. Relatividade Geral. 3. Gravidade Modificada. 4. Termodinâmica de Buracos Negros. I. Cuzinato, Rodrigo Rocha, orient. II. Título.

GERSON GIANINNI GARCIA DO NASCIMENTO

BURACOS NEGROS EM RG E GRAVIDADE MODIFICADA

O Presidente da banca examinadora abaixo assina a aprovação do Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal de Alfenas.

Aprovada em: 05 de dezembro de 2025

Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto
Universidade Federal de Alfenas

Assinatura:

Prof. Dr. Daniel Juliano Pamplona da Silva
Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. Gustavo do Amaral Valdiviesso
Universidade Federal de Alfenas

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pela oportunidade dada em realizar o curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia na Universidade Federal de Alfenas. Agradeço também aos meus pais, que me apoiaram durante essa jornada até este momento de conclusão desta etapa. Estendo este agradecimento ao Profº Drº Rodrigo Rocha Cuzinato, que me aceitou como orientando e me possibilitou uma ótima experiência, desde o começo até agora, em uma área trabalhosa, mas gratificante.

GGGN agradece à PRPPG da UNIFAL-MG e ao CNPq pelo apoio financeiro. RRC reconhece o apoio financeiro do CNPq.

RESUMO

Buracos negros (BN) são regiões do espaço onde a gravidade é tão intensa que nada consegue escapar, nem mesmo a luz. Eles se formam geralmente a partir do colapso de estrelas muito massivas, que ao esgotarem seu combustível nuclear acabam comprimidas em um ponto extremamente denso chamado singularidade. Esse colapso é parte do processo de morte estelar; a estrela implode sob a própria gravidade ou, conforme Einstein, sob a curvatura do espaço-tempo. O objetivo inicial deste trabalho foi estudar aspectos relacionados a geometria do espaço-tempo associada ao BN e suas variáveis termodinâmicas. O objetivo subsequente foi entender as expressões para: (i) a temperatura, ligada à superfície de gravidade; (ii) a entropia, relacionada à área do horizonte de eventos; e, (iii) a evaporação (transição de fase) do BN. Nosso trabalho teórico envolveu a análise sistemática do artigo [1]. Durante o trabalho, abordamos: (1) Estudo da gravitação nos séculos XIX e XX, do espaço-tempo na Relatividade Geral (RG) e da previsão dos buracos negros; (2) Dedução da métrica de Minkowski, com caracterização de intervalos, cones de luz e causalidade; (3) Análise qualitativa das equações de Einstein da RG; (4) Caracterização da métrica de Schwarzschild, com cones de luz e geodésicas via mecânica Lagrangiana; (5) Estudo da métrica de Kerr-Newman, incluindo singularidades, ergosfera, gravidade superficial e área; (6) Análise do impacto da hipótese de c e G variáveis sobre a física de BN. Estudamos quantitativamente: (A) Estrutura causal do BN de Schwarzschild; (B) Propriedades da métrica de Kerr-Newman; (C) Leis da termodinâmica de BN (zero, primeira e segunda); (D) Aplicação da radiação Hawking na evaporação de BN; (E) Construção das equações de BN perturbadas pela presença de acoplamentos físicos co-variáveis, a saber: velocidade da luz e constante gravitacional [2].

Palavras-chave: Buracos Negros; Relatividade Geral; Gravidade Modificada; Termodinâmica de Buracos Negros

ABSTRACT

Black holes (BH) are regions of space where gravity is so intense that nothing can escape, not even light. They generally form from the collapse of very massive stars, which, upon exhausting their nuclear fuel, end up compressed into an extremely dense point called a singularity. This collapse is part of the stellar death process; the star implodes under its own gravity or, according to Einstein, under the curvature of spacetime. The initial objective of this work was to study aspects related to the spacetime geometry associated with the BH and its thermodynamic variables. The subsequent objective was to understand the expressions for: (i) temperature, linked to surface gravity; (ii) entropy, related to the area of the event horizon; and (iii) evaporation (phase transition) of the BH. Our theoretical work involved the systematic analysis of article [1]. During the work, we addressed: (1) Study of gravitation in the 19th and 20th centuries, of spacetime in General Relativity (GR) and of the prediction of black holes; (2) Derivation of the Minkowski metric, with characterization of intervals, light cones, and causality; (3) Qualitative analysis of Einstein's GR equations; (4) Characterization of the Schwarzschild metric, with light cones and geodesics via Lagrangian mechanics; (5) Study of the Kerr–Newman metric, including singularities, ergosphere, surface gravity, and area; (6) Analysis of the impact of the hypothesis of variable c and G on BH physics. We quantitatively studied: (A) Causal structure of the Schwarzschild BH; (B) Properties of the Kerr–Newman metric; (C) Laws of BH thermodynamics (zeroth, first, and second); (D) Application of Hawking radiation to BH evaporation; (E) Construction of the BH equations perturbed by the presence of co-variable physical couplings, namely: speed of light and gravitational constant [2].

Keywords: Black Holes; General Relativity; Modified Gravity; Black Hole Thermodynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Cone de luz no espaço-tempo de Minkowski.....	15
Figura 2 - Diagrama da estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild	25
Figura 3 - Curvas do horizonte de eventos de Schwarzschild	29
Figura 4 - Representação da ergosfera de um buraco negro	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	O CENÁRIO DA FÍSICA NO SÉCULO XIX E XX	10
1.2	O ESPAÇO-TEMPO E A RELATIVIDADE GERAL.....	10
1.3	SOLUÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL E O “NASCIMENTO DOS BURACOS NEGROS”.....	11
1.4	A ERA DE OURO DOS BURACOS NEGROS.....	11
2	RELATIVIDADE ESPECIAL E O ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI.....	12
2.1	INTERVALOS E DIAGRAMA DE LUZ.....	12
2.2	CONES DE LUZ NO DIAGRAMA DO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI.....	12
2.3	NOTAÇÃO COMPACTA DA MÉTRICA DE MINKOWSKI.....	16
3	RELATIVIDADE GERAL E AS EQUAÇÕES DE EINSTEIN.....	19
4	BURACOS NEGROS DE SCHWARZSCHILD.....	21
4.1	CONES DE LUZ NA SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD.....	22
4.1.1	Aplicação da mecânica Lagrangiana para geodésicas em Schwarzschild.....	22
5	BURACO NEGRO DE KERR-NEWMAN	30
5.1	CASOS ESPECIAIS DA MÉTRICA DE KERR-NEWMAN	30

	NEWMAN	
	..	
5.1.1	Solução de Kerr ($Q = 0$).....	30
5.1.2	Solução de Reissner-Nordström ($J = 0$).....	31
5.1.3	Solução de Schwarzschild ($J = 0, Q = 0$).....	31
5.1.4	Métrica de Minkowski ($M = 0, J = 0, Q = 0$).....	31
5.2	SINGULARIDADES.....	32
5.3	ERGOSFERA.....	33
5.4	GRAVIDADE SUPERFICIAL (κ).....	35
5.5	ÁREA DO BURACO NEGRO.....	37
6	TERMODINÂMICA DE BURACOS NEGROS	38
6.1	LEIS MECÂNICAS DOS BURACOS NEGROS.....	38
6.2	EFEITO HAWKING.....	39
6.3	APLICAÇÃO: EVAPORAÇÃO DE UM BURACO NEGRO COM A MASSA DO SOL.....	39
7	BURACOS NEGROS G COM c E CO-VARIÁVEIS	42
8	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

A Física dos séculos XIX e XX passou por uma transformação profunda que redefiniu nossa compreensão do Universo. No século XIX, a visão clássica baseada nas leis de Newton parecia capaz de explicar praticamente todos os fenômenos naturais, enquanto o eletromagnetismo de Maxwell consolidava a ideia de um mundo regido por leis determinísticas e contínuas. No entanto, no início do século XX, esse panorama começou a mudar com o surgimento de duas revoluções: a mecânica quântica e a teoria da relatividade. A formulação do conceito de espaço-tempo por Einstein, em 1905 e 1915, rompeu com a noção tradicional de espaço e tempo absolutos. Na relatividade restrita, espaço e tempo são unidos em uma estrutura quadridimensional onde eventos físicos dependem do referencial do observador. A relatividade geral, então, aprofunda essa mudança ao descrever a gravidade não como uma força, mas como a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. Essa nova geometria do Universo permitiu prever fenômenos antes impensáveis. Veremos a seguir, de forma aprofundada, como esse contexto histórico possibilitou os avanços nos estudos dos BNs.

1.1 O Cenário da Física nos Séculos XIX e XX

No final do século XIX, a Física parecia estar próxima de sua conclusão teórica. Como destacado por Lord Kelvin, acreditava-se que os fundamentos da ciência estavam praticamente completos, restando apenas duas “nuvens no horizonte”. No entanto, essas duas questões levariam a revoluções científicas e ao desenvolvimento de duas grandes áreas da Física Moderna:

- A Mecânica Quântica, que emergiu do estudo da falha do Teorema de Equipartição de Energia em baixas temperaturas e do problema da “catástrofe do ultravioleta”;
- A Teoria da Relatividade, que surgiu a partir dos resultados negativos do experimento de Michelson-Morley sobre o éter luminífero.

Este projeto de pesquisa está relacionado à última vertente.

1.2 O Espaço-Tempo e a Relatividade Geral

Os estudos iniciais de Albert Einstein levaram à Teoria da Relatividade Especial, que reformulou conceitos de espaço e tempo integrados. Posteriormente, Hermann Minkowski mostrou que essa teoria podia ser interpretada geometricamente, como um espaço quadridimensional, com o tempo sendo a quarta dimensão. Apesar de inicialmente relutante, Einstein adotou a abordagem de Minkowski, o que resultou, posteriormente, na formulação da Teoria da Relatividade Geral.

Essa teoria explicou a gravitação como a curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia, resumida elegantemente pela frase de John Archibald Wheeler: “A massa diz ao espaço-tempo como se curvar, e o espaço-tempo diz à massa como se mover”. Para desenvolver essa teoria, Einstein utilizou conceitos avançados de geometria desenvolvidos por Riemann, Ricci e Levi-Civita.

1.3 Soluções da Relatividade Geral e o “Nascimento” dos Buracos Negros

Pouco após a publicação da Relatividade Geral, Karl Schwarzschild, em meio à Primeira Guerra Mundial, encontrou uma solução exata para as equações de Einstein. Sua solução descreveu objetos que mais tarde seriam chamados de buracos negros, regiões do espaço-tempo onde a gravidade é tão intensa que nada pode escapar.

Estudos posteriores aprofundaram o entendimento desses objetos. Nos anos de 1930, Oppenheimer e Snyder demonstraram que buracos negros podem se formar a partir de estrelas massivas em colapso. Entre 1916 e 1963, cientistas como Hans Reissner, Gunnar Nordstrom, Roy Kerr e Ezra Newman generalizaram a solução de Schwarzschild (que descreve um buraco negro esférico e estático), considerando buracos negros com carga elétrica e rotação (momento angular).

1.4 A Era de Ouro dos Buracos Negros

Entre as décadas de 1960 e 1970, uma nova era de descobertas relativas aos buracos negros começou. Stephen Hawking e Jacob Bekenstein desenvolveram teorias que conectavam buracos negros à termodinâmica, atribuindo-lhes propriedades como entropia e temperatura. Esses estudos pavimentaram o caminho para avanços experimentais, como a detecção direta de ondas gravitacionais pelo observatório LIGO, em 2015, confirmando a existência de buracos negros e permitindo novas explorações na gravitação e cosmologia.

2 Relatividade Especial e o Espaço-Tempo de Minkowski

A relatividade especial, proposta por Einstein em 1905, descreve como as leis da física são as mesmas para todos os observadores em movimento retilíneo uniforme e como a velocidade da luz no vácuo é constante. Já o Espaço-Tempo de Minkowski, formulado por Hermann Minkowski em 1908, é a forma geométrica de representar a relatividade especial. Nele, o espaço e o tempo não são entidades separadas, mas dimensões de uma única estrutura quadridimensional. A separação entre eventos é descrita pelo intervalo de Minkowski, que permanece invariável para todos os observadores. Essa geometria torna clara a natureza unificada do espaço-tempo e fornece a base matemática para a relatividade especial e, posteriormente, para a relatividade geral. Abordaremos à seguir a compreensão acerca desses assuntos.

2.1 Intervalos e Diagrama de Luz

Em 1907, Hermann Minkowski introduziu uma nova forma de compreender os conceitos de espaço e de tempo no contexto da Teoria da Relatividade Especial. Ele propôs que essas grandezas não são absolutas, mas sim relativas, dependendo do observador e de seu movimento em relação a um referencial inercial. Apesar dessa relatividade, Minkowski formulou uma equação que combina o espaço e o tempo em uma única entidade absoluta, chamada de espaço-tempo. Esta apresenta uma propriedade fundamental: a invariância do intervalo espaço-temporal. A equação é expressa como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \quad (1)$$

Essa equação, conhecida como o Elemento de Linha de Minkowski, representa a “distância” (ou separação quadridimensional) entre dois eventos no espaço-tempo. A partir dela, é possível classificar os intervalos em três tipos, dependendo do sinal de ds^2 . Vamos explorar essas classificações na próxima seção.

2.2 Cones de Luz no Diagrama do Espaço-Tempo de Minkowski

Os cones de luz no espaço-tempo são diagramas desenvolvidos por Hermann Minkowski que ajudam a compreender as relações causais existentes no espaço-tempo. Em cada ponto, há um cone que delimita as regiões do passado e do futuro, separadas pelo ponto do presente, que estabelece causalidade entre passado e futuro. O estudo desses cones de luz é baseado no elemento de linha de Minkowski, dado na Eq. (1).

(I) Intervalo do tipo-luz ($ds^2 = 0$)

- Tipo-Luz: Apenas sinais na velocidade c podem conectar os eventos.

No intervalo do tipo-luz, temos: $ds^2 = 0$. Vejamos a consequência disso:

$$0 = ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

i.e

$$c^2 dt^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2) = d\vec{r}^2,$$

ou

$$c^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2,$$

ou ainda

$$c^2 = (\vec{v})^2,$$

pois $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Ademais, $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$. Logo,

$$c = v,$$

que é a velocidade de uma partícula que se move à velocidade da luz.

Logo, estamos falando de uma partícula de luz, que é consistente com nosso ponto de partida:

$$ds^2 = 0.$$

Como a relação acima indica a trajetória de uma partícula de luz, esse elemento de linha merece ser chamado de intervalo tipo-luz.

(II) Intervalo do tipo-tempo ($ds^2 < 0$)

- Tipo-Tempo: Os eventos podem ser conectados por partículas massivas com $v < c$ permitindo uma relação causal.

No intervalo do tipo-tempo, onde o $(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ é subdominante e $(c dt)^2$ é dominante, a relação fica assim:

$$ds^2 = \underbrace{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}_{\text{subdominante}} - \underbrace{(c dt)^2}_{\text{dominante}} \Rightarrow ds^2 \text{ é negativo} \Rightarrow ds^2 < 0.$$

Como consequência, podemos reescrever como:

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 dt^2 < 0,$$

ou

$$c^2 > \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = v^2.$$

A separação existente entre os eventos permite o deslocamento de partículas massivas, previsto na Relatividade Especial com velocidade $v < c$.

(III) Intervalo do tipo-espaço ($ds^2 > 0$)

- Tipo-Espaço: Nenhuma conexão causal é possível, já que exigiria $v > c$.

No intervalo do tipo-espaço, a parte espacial domina sobre a parte temporal:

$$ds^2 = \underbrace{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}_{\text{dominante}} - \underbrace{(c dt)^2}_{\text{subdominante}} \Rightarrow ds^2 \text{ é positivo} \Rightarrow ds^2 > 0,$$

e, como consequência:

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (c dt)^2 > 0,$$

ou

$$d\vec{r}^2 > c^2 dt^2,$$

ou ainda

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 > c^2.$$

Logo,

$$v > c.$$

Então, como já dissemos: $ds^2 > 0 \Leftrightarrow v > c$. Essa relação implica que, para um intervalo do tipo-espaço, a velocidade da partícula seria maior que c . Porém, de acordo com a Relatividade Especial, partículas massivas não podem atingir velocidades superiores à velocidade da luz. Assim, esse intervalo representa uma região proibida para o movimento de partículas.

Diagrama do Espaço-Tempo

No diagrama do espaço-tempo, podemos analisar a estrutura causal do espaço-tempo, dividindo-o em regiões do passado, presente e futuro acessíveis a uma partícula massiva. Essa estrutura tem a forma de um cone, chamado cone de luz: as bordas do cone são formadas por linhas inclinadas relacionadas à trajetórias de feixes de luz (Partículas não massivas), como veremos abaixo.

Considere uma partícula de luz, para a qual vale

$$c^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 \Rightarrow c = \frac{dr}{dt}.$$

Para um movimento só no eixo x (positivo), temos:

$$dy = dz = 0.$$

Então, o deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$, fica:

$$d\vec{r} = (dx)\hat{i} + (dy)\hat{j} + (dz)\hat{k},$$

ou

$$(dr)\hat{i} = (dx)\hat{i},$$

que dá

$$dr = dx.$$

Assim,

$$c = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = c dt \Rightarrow \int dx = c \int dt,$$

onde c sai do sinal de integração pois c é uma constante universal. Para um deslocamento que começa na origem em $t = 0$, temos:

$$\int_0^x dx' = c \int_0^t dt' \Rightarrow x'|_0^x = c t'|_0^t \Rightarrow x - 0 = c(t - 0),$$

ou seja,

$$x = (ct),$$

que pode ser rescrito como:

$$(ct) = (1)x + (0).$$

Esta equação pode ser comparada com a equação da reta:

$$y = (a)x + (b).$$

Comparando as duas últimas equação:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Logo, para partículas de luz, temos um gráfico linear em que a inclinação é exatamente 45° . Na fig. ??, essa reta corresponde as linhas inclinadas à direita, que formam a lateral direita do cone. A linha inclinada à esquerda, que forma a lateral esquerda do cone, é obtida repetindo o raciocínio acima no caso de um movimento da partícula de luz na direção negativa do eixo x .

Para uma partícula massiva (que não é de luz), vale:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = vt \Rightarrow x = \frac{v}{c} (ct),$$

i.e.

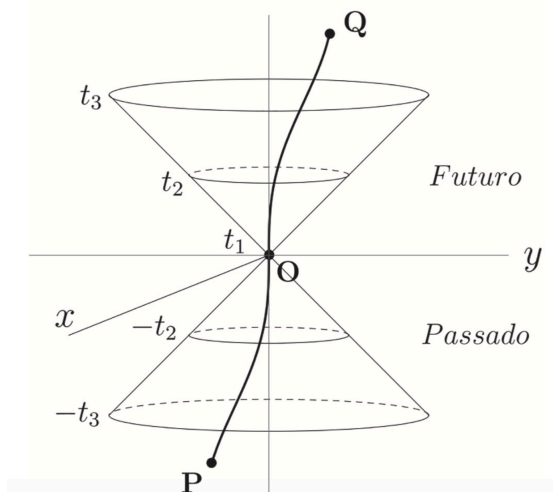
$$(ct) = \frac{c}{v}x.$$

Como $v < c$, temos:

$$c > v \Rightarrow \frac{c}{v} > 1 \Rightarrow \text{inclinação maior que } 45^\circ \Rightarrow \text{região interna do cone.}$$

Isso significa que partículas massivas acessam apenas a região interna do cone de luz, tanto no passado (cone inferior, $t < 0$) como no futuro (cone superior, $t > 0$).

Figura 1 – Cone de luz no espaço-tempo de Minkowski



Fonte: [1]

2.3 Notação compacta da métrica de Minkowski

Com base no diagrama do espaço-tempo de Minkowski apresentado na seção anterior, introduzimos aqui o conceito da métrica de Minkowski para coordenadas cartesianas e sua aplicação no estudo da Relatividade Especial.

As coordenadas cartesianas são definidas como:

$$x^\mu = \begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (2)$$

O tensor métrico do espaço-tempo plano, ou métrica de Minkowski, é dado por:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (3)$$

O elemento de linha como função da métrica é expresso como:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4)$$

Na última igualdade, utilizamos a convenção de soma de Einstein, que admite uma soma para índices iguais (repetidos) que apareçam uma vez como subscrito e outra vez como superescrito.

No que segue, usaremos as Eqs. (2) e (3) para construir uma nova versão de (4). Tomando a diferencial da Eq. (2):

$$dx^\mu = \begin{cases} dx^0 = d(ct) = cdt \\ dx^1 = dx \\ dx^2 = dy \\ dx^3 = dz \end{cases} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (5)$$

Adotando o produto triplo de matrizes na Eq.(3)

$$\mathbf{CAB} = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{CAB} &= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &= -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \end{aligned}$$

Esse produto é justamente o que denominamos ds^2 na Eq. (4). Logo:

$$\mathbf{CAB} = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = ds^2, \quad (7)$$

que corresponde ao elemento de linha de Minkowski.

Coordenadas esféricas

A Eq. (7) dá a métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas. Esse elemento de linha pode ser expresso também em coordenadas esféricas. A métrica de Minkowski em coordenadas esféricas é:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (8)$$

com as coordenadas esféricas.

Sendo:

$$dz^2 = \cos^2 \theta dr^2 - 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} dy^2 = & \sin^2 \theta \sin^2 \phi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d\phi^2 \\ & + 2r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi dr d\theta + 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi dr d\phi + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} dx^2 = & \sin^2 \theta \cos^2 \phi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\phi^2 \\ & + 2r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi dr d\theta - 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi dr d\phi - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (11)$$

as diferenciais quadráticas em função de (r, θ, ϕ) e $(dr, d\theta, d\phi)$, podemos substituir as Eqs. (9), (10) e (11) em (7), resultando em:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (12)$$

confirmando o resultado (8), que queríamos demonstrar que é o elemento de linha de Minkowski em coordenadas esféricas.

Podemos reconhecer a métrica $g_{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas ao observar (12). De fato, nessas coordenadas:

$$x^\mu = \begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = r \\ x^2 = \theta \\ x^3 = \phi \end{cases} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3),$$

tal que

$$dx^\mu = \begin{cases} dx^0 = cdt \\ dx^1 = dr \\ dx^2 = d\theta \\ dx^3 = d\phi \end{cases} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3),$$

i.e.

$$dx^\mu = (cdt, dr, d\theta, d\phi). \quad (13)$$

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ em coordenadas esféricas é composto pelos coeficientes das diferenciais (13) na Eq. (12):

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, +1, +r^2, +r^2 \sin^2 \theta). \quad (14)$$

3 Relatividade Geral e as Equações de Einstein

Com o objetivo de expandir o estudo geométrico introduzido na Relatividade Especial, Einstein usou experimentos mentais para considerar referenciais não-inerciais. Isso resultou na criação da Teoria da Relatividade Geral.

Por meio desses experimentos mentais, foi possível demonstrar uma ideia intrigante: um observador situado em um elevador completamente isolado do mundo exterior não seria capaz de distinguir se os fenômenos de queda de corpos são causados pela aceleração do elevador ou por um campo gravitacional externo. Esse experimento levou à formulação do princípio da equivalência, que estabelece uma correspondência fundamental entre aceleração e gravidade.

Além disso, o mesmo experimento revelou que, para o observador mencionado, todas as quedas de corpos seriam afetadas de maneira idêntica pela aceleração gravitacional. Essa conclusão sugere que o efeito é independente dos objetos individuais, mas está relacionado a uma propriedade intrínseca do espaço-tempo: sua curvatura. A descoberta foi tão marcante que Einstein a classificou como o pensamento mais feliz de sua vida.

Quando falamos sobre essa descoberta da curvatura como gravitação e abordamos o conceito de Relatividade Geral, mesmo que de maneira introdutória, precisamos de conhecimentos mais aprofundados, especialmente porque envolve o uso de tensores. Estes últimos são objetos matemáticos que estendem o estudo de escalares, vetores e matrizes, desempenhando um papel crucial na teoria.

Dessa forma, é possível formular as equações de campo de Einstein como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Aqui, $R_{\mu\nu}$ representa o tensor de Ricci, ou tensor da curvatura de Ricci, que na geometria diferencial é definido como uma contração interna de dois índices no tensor de curvatura. Ele depende das derivadas de segunda ordem do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Já R , conhecido como escalar de curvatura, é obtido por meio do traço do tensor de Ricci, sendo expresso como:

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (16)$$

Nesta equação, $g^{\mu\nu}$ corresponde à inversa da métrica. Para completar, G é a constante de gravitação universal e $T_{\mu\nu}$ é um tensor que descreve o conteúdo de matéria e energia no espaço. Observa-se ainda que os índices μ e ν variam de 0 a 3, conforme foi estudado anteriormente no tensor métrico de Minkowski.

Considerando que $R_{\mu\nu}$ e R dependem de $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas, conclui-se que as Equações de Einstein (15) representam equações diferenciais parciais acopladas, cuja solução determina as componentes do tensor métrico. Isso implica que o campo gravitacional, que é representado pela métrica e pelos tensores de curvatura, depende diretamente do conteúdo de matéria e energia descrito por $T_{\mu\nu}$. Essa dependência pode ser comparada à equação de Poisson da gravitação newtoniana:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (17)$$

Nesta equação, Φ é o potencial gravitacional e ρ é a densidade de massa. Campos gravitacionais menos intensos são bem descritos pela Eq. (17). Campos gravitacionais

mais intensos, como aqueles gerados por buracos negros, precisam ser descritos pela Eq. (15).

Quando analisamos uma região de vácuo, onde não há objetos massivos, obtemos $R_{\mu\nu} = R = T_{\mu\nu} = 0$. Nesse caso, a solução $g_{\mu\nu}$ corresponde à métrica de Minkowski, que é uma solução particular das equações de Einstein.

A métrica de Minkowski representa apenas uma dentre diversas soluções possíveis das Equações de Einstein. Cada solução reflete condições específicas dentro de diferentes contextos. Neste estudo, o foco recai sobre as soluções associadas aos buracos negros, que são fundamentais para compreender objetos astrofísicos muito massivos no âmbito da Teoria da Relatividade Geral.

4 Buracos Negros de Schwarzschild

Ao estudar uma região de vácuo ao redor — ou fora — de um corpo massivo, esfericamente simétrico e estático — em repouso —, encontramos uma solução muito importante das equações de Einstein: a solução de Schwarzschild. O elemento de linha associado a ela é:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (18)$$

Aqui, $t \in [-\infty, \infty]$ é a coordenada temporal, $r \in [0, \infty]$ é a coordenada radial, e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ onde $\theta \in [0, \pi]$ (ângulo polar) e $\phi \in [0, 2\pi]$ (ângulo equatorial) representando a simetria esférica desta solução. Além disso, o termo $2M$ é denominado raio de Schwarzschild (r_S), relacionado à massa m do objeto que gera a curvatura pela equação:

$$r_S = 2M = \frac{2Gm}{c^2} \quad (M: \text{massa geométrica}). \quad (19)$$

Esse raio é proporcional à massa e determina a “fronteira” física mais importante de um buraco negro. Para uma dedução de (19), veja o artigo [5].

Uma observação importante é que, na situação em que $r \gg r_S$, a Eq. (18) assume a forma do elemento de linha de Minkowski, levando à conclusão de que t é o tempo medido por observadores situados no espaço-tempo plano de Minkowski, infinitamente distantes de $r = r_S = 2M$. Outro ponto relevante é que, para certos valores ($\theta = 0$ e $\theta = \pi$), a solução se torna degenerada. Essa situação pode ser resolvida por meio de uma mudança para coordenadas cartesianas, dentre outras possibilidades. Esse tipo de problema é chamado de singularidade de coordenadas, já que se refere a limitações no sistema de coordenadas escolhido e pode ser contornado ao adotar outro sistema.

Outros valores podem também causar degenerescência na solução de Schwarzschild. Isso ocorre para $r = 2M$ e $r = 0$, onde o elemento de linha diverge no setor temporal (para $r = 0$, $ds^2 \rightarrow \infty$ pois $-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \rightarrow -\left(1 - \frac{2M}{0}\right) dt^2 \rightarrow \infty$) ou degenera à zero no mesmo setor (para $r = 2M$ pois $-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \rightarrow -\left(1 - \frac{2M}{2M}\right) dt^2 \rightarrow 0$). A degenerescência em $r = 0$ é essencial, ou seja, não pode ser removidas por uma mudança de coordenadas.

Para distinguir o que é apenas uma falha de escolha nas coordenadas do que é uma verdadeira singularidade do espaço-tempo, calculamos grandezas invariantes, isto é, independentes do sistema de coordenadas. Uma das maneiras é utilizando o escalar de Kretschmann, que é dado por:

$$K(r) = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (20)$$

Aqui, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Riemann, sendo a última identidade válida para a solução de Schwarzschild.

O valor de K é um escalar que mede o módulo quadrado da curvatura e é independente do sistema de coordenadas utilizado, devido à sua natureza tensorial. Quando $r = 2M$, a curvatura permanece finita:

$$K(2M) = \frac{48M^2}{(2M)^6} = \frac{3}{4M^4} \neq 0,$$

mas no ponto $r = 0$, temos:

$$\lim_{r \rightarrow 0} K(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{48M^2}{r^6} \rightarrow \infty,$$

indicando uma singularidade intrínseca no sistema, que não pode ser resolvida por mudanças de coordenadas, como ocorre no caso em $r = 2M$ (que pode ser corrigida por coordenadas de Kruskal-Szekeres). Em $r = 0$, a curvatura do espaço-tempo explode. Essa é a verdadeira singularidade central do buraco negro, impossível de ser eliminada com outra escolha de coordenadas.

Embora $r = 2M$ não represente uma singularidade essencial, ele ainda desempenha um papel fundamental. O raio de Schwarzschild marca a inversão dos papéis do tempo e do espaço na equação do elemento de linha. Quando $r < 2M$, os sinais dos termos associados a dr^2 e dt^2 se invertem:

$$r < 2M \Rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right) < 0,$$

e o elemento de linha é reescrito como:

$$ds^2 = - \left(- \left| 1 - \frac{2M}{r} \right| \right) dt^2 - \frac{1}{\left| 1 - \frac{2M}{r} \right|} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Isso implica que as coordenadas do tempo e do espaço trocam de papéis em $r = 2M$, pois os coeficientes de dt^2 e de dr^2 trocam de sinal. Concluimos, assim, que $r = 2M$ corresponde ao horizonte de eventos de um buraco negro. Isso ficará ainda mais claro no estudo da próxima seção e, particularmente, na Fig. ??.

4.1 Cones de Luz na Solução de Schwarzschild

Ao analisarmos a dedução dos cones de luz no espaço-tempo descrito pela métrica de Schwarzschild, empregaremos uma poderosa ferramenta matemática: o formalismo lagrangiano.

4.1.1 Aplicação da mecânica Lagrangiana para geodésicas em Schwarzschild

Agora, iremos estudar a função Lagrangiana L que produz as mesmas equações de movimento para partículas-teste que aquelas obtidas a partir da equação de geodésica, a qual é:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0, \quad (21)$$

onde $\tau \equiv \lambda$ (τ é o tempo próprio), $\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$ e $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\sigma g_{\nu\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\rho\sigma})$.

Dessa forma, buscamos determinar a forma funcional de L tal que a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)} \right] = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (22)$$

com $\left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \dot{x}^\mu$, produza os resultados equação da geodésica (21).

A escolha natural para essa Lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (23)$$

O lado direito de (23) pode ser interpretado como a energia cinética da partícula por unidade de massa. (A energia potencial é nula para a partícula livre.)

Utilizando a Eq. (18), temos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow (g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} \left(-1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix},$$

com $g_{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, $g_{11} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$, $g_{33} = r^2$, $g_{44} = r^2 \sin^2 \theta$.

Tendo em vista a métrica de Schwarzschild, podemos explicitar a Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} (g_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 + g_{11} \dot{x}^1 \dot{x}^1 + g_{22} \dot{x}^2 \dot{x}^2 + g_{33} \dot{x}^3 \dot{x}^3),$$

onde

$$\begin{cases} x^0 = ct = t & (c = 1) \\ x^1 = r \\ x^2 = \theta \\ x^3 = \phi \end{cases}.$$

Assim:

$$L = \frac{1}{2} \left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \quad (24)$$

Agora, podemos resolver a equação de Euler-Lagrange (22) para a Lagrangiana de Schwarzschild (24). Veja:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} \right) = 0 \end{cases}. \quad (25)$$

Estamos interessados em $\frac{\partial L}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} \right) = 0$, primeiro. Para isso calculamos:

$$\frac{\partial L}{\partial x^0} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (26)$$

porque L independe explicitamente de t , cf. (24). Por outro lado,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right],$$

i.e.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \dot{t}} (\dot{t}^2) = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}. \quad (27)$$

Substituindo (26) e (27) na primeira equação em (25):

$$0 - \frac{\partial}{\partial \tau} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \right] = 0.$$

Como $\frac{\partial}{\partial \tau} [\dots] = 0 \Rightarrow [\dots] = \text{constante}$, temos:

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = \text{constante} = k,$$

i.e.

$$\dot{t} = \frac{k}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)}. \quad (28)$$

Diagrama de cones de luz em Schwarzschild Por outro lado, lembre-se que o elemento de linha ds^2 é nulo para partículas de luz. Logo,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow 0 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

Dividindo pelo (quadrado do) elemento de parâmetro afim $d\lambda$:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0,$$

onde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. Logo,

$$2 \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) = 0,$$

onde reconhecemos L , Eq. (23), ou seja,

$$2L = 0 \quad (\text{luz}). \quad (29)$$

O próximo passo é usar a Lagrangiana de Schwarzschild, Eq.(24), na Eq. (29) acima. Faremos isso admitindo que o movimento é radial, que não existe variação nos ângulos, e, portanto, que $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$. Logo:

$$2L = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \dot{r}^2 = 0. \quad (30)$$

Substituindo (28) em (30):

$$\dot{r} = \pm k. \quad (31)$$

Dividindo (28) por (31):

$$t = \pm r \pm 2M \ln |r - 2M| + \text{constante}. \quad (32)$$

Essa equação dá as curvas para a construção do diagrama de estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild. Se tivéssemos apenas o primeiro termo do lado direito, obteríamos de novo a estrutura de cones de luz de Minkowski. Esses cones serão deformados pela presença dos termos adicionais em Schwarzschild.

No passo a seguir, vamos construir um gráfico que represente a estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild. Nessa etapa do estudo, serão utilizados esquemas

de cores, que auxiliarão na compreensão das curvas no gráfico. Por este motivo, recomendamos o uso da versão colorida (digital) do material.

Consideremos primeiro os sinais superiores em (32), e façamos $\chi = \text{constante}$:

$$t = r + 2M \ln |r - 2M| + \chi.$$

Suponha, primeiro que:

$$\chi = 0.$$

Então,

$$t = \begin{cases} r + \ln(1 - r), & 0 < r < 1 \\ r + \ln(r - 1), & r > 1 \end{cases}. \quad (33)$$

Podemos fazer o gráfico das duas linhas na equação acima: uma linha vermelha para o intervalo $0 < r < 1$, uma linha azul para $r > 1$. Isso está representado na Fig. ??.

Repetimos o procedimento para outros valores de χ , por exemplo:

$$\chi = 1.$$

Logo,

$$t = \begin{cases} r + \ln(1 - r) + 1, & 0 < r < 1 \\ r + \ln(r - 1) + 1, & r > 1 \end{cases}, \quad (34)$$

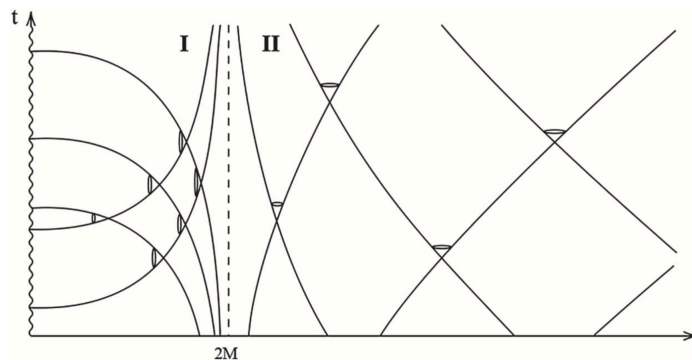
e

$$\chi = 2,$$

com

$$t = \begin{cases} r + \ln(1 - r) + 2, & 0 < r < 1 \\ r + \ln(r - 1) + 2, & r > 1 \end{cases}. \quad (35)$$

Figura 2 – Diagrama da estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild.



Fonte: [1]

Para completar a construção desse gráfico, passamos a parte 2, que é considerar os sinais de baixo na Eq. (32) com:

$$2M = 1,$$

ou seja, devemos fazer o gráfico de:

$$t = -r - \ln |r - 1| + \xi,$$

onde ξ é a constante. Assim,

$$t = \begin{cases} -r - \ln(1-r) + \xi, & 0 < r < 1 \\ -r - \ln(r-1) + \xi, & r > 1 \end{cases}.$$

Agora supomos

$$\xi = 0.$$

Logo,

$$t = \begin{cases} -r - \ln(1-r), & 0 < r < 1 \\ -r - \ln(r-1), & r > 1 \end{cases}. \quad (36)$$

Depois, tomamos

$$\xi = 1.$$

Logo

$$t = \begin{cases} -r - \ln(1-r) + 1, & 0 < r < 1 \\ -r - \ln(r-1) + 1, & r > 1 \end{cases}. \quad (37)$$

As curvas correspondentes as Eqs. (36) e (37) são as curvas verdes e amarelas na Fig. ???. Os cones de luz em Schwarzschild são formados nas intersecções das curvas **verdes** e **vermelhas**, à esquerda de $r = 2M = 1$; e, nas intersecções das curvas **laranja** e **azuis** à direita de $r = 1$. Note a deformação nos cones e o direcionamento do futuro da partícula para a singularidade em $r = 0$.

Trajétoria radial de partículas massivas em Schwarzschild Para partículas massivas a situação é diferente daquela que leva à Eq. (29). Considere o elemento de linha ds^2 e sua relação com o intervalo de tempo-próprio $d\tau$:

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2.$$

Então:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Rightarrow -\frac{c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau},$$

Como $\frac{dx^\nu}{d\tau} = \dot{x}^\nu$,

$$-\frac{1}{2}c^2 = \underbrace{\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}_{L, \text{ pela Eq. (23)}} = L,$$

ou seja,

$$2L = -c^2,$$

que é o análogo da Eq. (29) para partículas massivas. Como $c = 1$:

$$2L = -1,$$

e o parâmetro afim $\lambda = \tau$ é igual ao tempo próprio τ . Logo, por exemplo:

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}.$$

Temos, pela Eq. (23):

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \Rightarrow 2L = g_{00}(\dot{t})^2 + g_{11}(\dot{r})^2 + g_{22}(\dot{\theta})^2 + g_{33}(\dot{\phi})^2.$$

Para trajetórias radiais,

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0,$$

pois não há variação angular. Assim,

$$2L = g_{00}(\dot{t})^2 + g_{11}(\dot{r})^2 \Rightarrow 2L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\dot{r}^2. \quad (38)$$

Porém,

$$2L = -1 \quad (\text{partículas com massa}).$$

Então:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\dot{r}^2 = -1, \quad (39)$$

Por outro lado, usamos a Eq. (22) com $\lambda = \tau$. Trata-se da equação de **Euler-Lagrange**:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\rho} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} \right) = 0. \quad (40)$$

Como:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\rho} \left\{ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{2}\dot{t}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\frac{1}{2}\dot{r}^2 \right\} \quad (41)$$

Isso nos permite substituir a Eq. (41) em (40), resultando em:

$$-\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^0} \left\{ -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{1}{2}\dot{t}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}\frac{1}{2}\dot{r}^2 \right\} \right) = 0.$$

Para a coordenada t , fica:

$$t = x^0 \Rightarrow \dot{t} = \dot{x}^0,$$

e a equação acima assume a forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} \right] = 0,$$

que é o equivalente da Eq. (28) (para partículas massivas, ou seja, com τ no lugar de λ). Como a derivada acima é zero, o objeto entre colchetes é constante, logo:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} = C, \quad (42)$$

com uma troca de k por C por ajuste de notação para o caso de partículas massivas.

1

¹Observação: Note que, no **limite** em que $r \rightarrow \infty$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} C$$

A partir da Eq. (42), temos,

$$\dot{t} = \frac{C}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}.$$

Porém, na *Observação* acima, escolhemos $C = 1$. Então:

$$\dot{t} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \quad (43)$$

Agora, substituimos (43) na Eq. (39):

$$\dot{r}^2 = \frac{2M}{r}. \quad (44)$$

Continuando:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2M}{r}}, \quad (45)$$

com o sinal + representando a partícula aumentando sua distância radial do buraco negro, ou seja, se afastando do buraco negro. Mas queremos a partícula caindo em direção ao buraco negro, logo a distância radial deve diminuir com o tempo, ou seja, a velocidade \dot{r} deve ser negativa. Logo, escolhemos o sinal –, e ficamos com:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}, \quad (46)$$

que ao integrarmos, o resultado é:

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2M}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2} \right). \quad (47)$$

No **horizonte**, há a seguinte condição:

$$r = 2M,$$

usando essa condição de contorno em (47), encontramos:

$$\tau_h = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2M}} \left[r_0^{3/2} - (2M)^{3/2} \right] + \tau_0,$$

sendo este finito.

Na origem (singularidade):

$$r = 0,$$

Resultando em:

$$\boxed{\dot{t} = C}$$

Se escolhemos

$$C = 1,$$

então:

$$\dot{t} = 1 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow dt = d\tau \Rightarrow \boxed{t = \tau}$$

ou seja, o relógio fixado na partícula massiva (que mede τ) está sincronizado com o relógio fixado no observador (que mede t). Essa sincronia acontece porque **inicialmente** a partícula está parada junto do observador (o qual é considerado muito longe do buraco negro, i.e. no infinito).

com

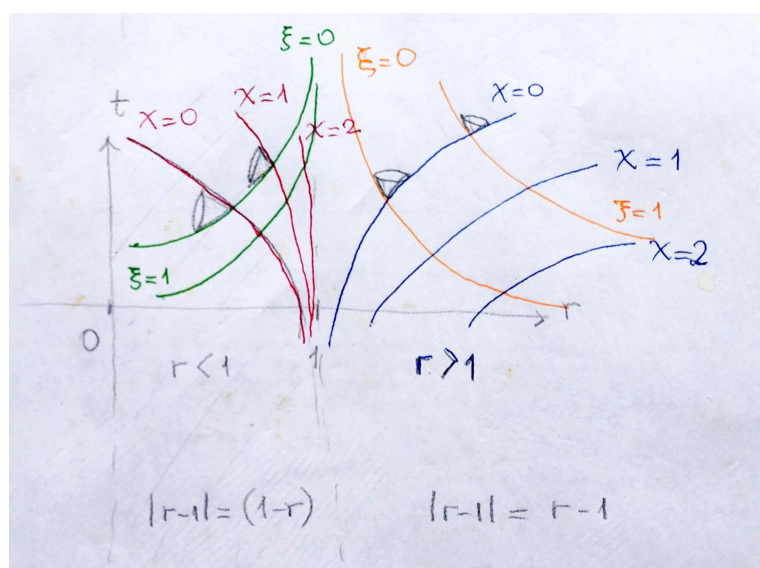
$$\tau = \tau_*,$$

e temos:

$$\tau_* = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2M}} r_0^{3/2} + \tau_0,$$

que é, também, um tempo finito. Sendo assim, não precisamos esperar um tempo infinito para a destruição da partícula no centro do buraco negro.

Figura 3 – Curvas do horizonte de eventos de Schwarzschild



Fonte: autores, 2025

5 Buraco Negro de Kerr-Newman

Um buraco negro (BN) pode se formar por diferentes processos, sendo o mais comum o colapso gravitacional de estrelas massivas. Quando uma estrela esgota seu combustível de fusão nuclear, ela não consegue mais sustentar sua estrutura contra a própria gravidade, resultando em um colapso. Esse processo pode ser interpretado, na relatividade geral de Einstein, como uma curvatura extrema do espaço-tempo. Durante o colapso, propriedades como o momento angular (J) (associado à rotação da estrela) e a carga elétrica (Q) (se não nula) são conservadas e influenciam a estrutura do buraco negro resultante. A descrição matemática de um buraco negro que possui massa (M), momento angular (J) e carga elétrica (Q) é dada pela solução de Kerr-Newman. A métrica que descreve o espaço-tempo ao redor desse buraco negro, em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ), é:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (48)$$

Na solução da Eq. (48), θ , ϕ e r são as coordenadas esféricas habituais, enquanto t representa o tempo medido por observadores posicionados longe do buraco negro. Há também:

$$a = \frac{J}{M}, \quad (49)$$

que é o momento angular J por unidade de massa M ,

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (50)$$

é uma medida de distância radial que incorpora o momento angular por unidade de massa e a contribuição da coordenada polar; e

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (51)$$

é um parâmetro de interesse envolvendo massa, carga, momento angular e distância. O interesse de Δ está no fato de que ele é uma quantidade decisiva para determinação dos horizontes do buraco negro.

Aqui, a massa M mantém o significado atribuído a esse parâmetro no contexto da solução de Schwarzschild e obedece à Eq. (19).

5.1 Casos Especiais da Métrica de Kerr-Newman

A métrica de Kerr-Newman generaliza outras soluções importantes da relatividade geral, que surgem quando certas condições são impostas.

5.1.1 Solução de Kerr ($Q = 0$)

Se a carga elétrica é nula, a métrica descreve um buraco negro em rotação, mas sem carga. Essa é a solução de Kerr, que depende apenas da massa (M) e do momento angular (J).

Neste caso particular, a métrica (48) permanece inalterada na forma. Porém, a função Δ é simplificada para

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2,$$

já que $Q = 0$.

5.1.2 Solução de Reissner-Nordström ($J = 0$)

Se $J = 0$, então $a = 0$, o que leva à:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2 = r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right); \quad \rho^2 = r^2,$$

e a Eq. (48) fica:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (52)$$

sendo que essa é a solução de Reissner-Nordström, que descreve um buraco negro com carga elétrica, mas sem rotação.

5.1.3 Solução de Schwarzschild ($J = 0, Q = 0$)

Se tomarmos simultaneamente $J = 0$ e $Q = 0$, as Eqs. (49), (50) e (51) reduzem-se para: $a = 0$, $\rho = r$ e $\Delta = r^2 - 2Mr$. Colocando isso no elemento de linha (48) dá:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (53)$$

tal qual a métrica de Schwarzschild (18), que descreve um buraco negro sem carga elétrica e sem rotação, como esperávamos.

5.1.4 Métrica de Minkowski ($M = 0, J = 0, Q = 0$)

Uma outra redução possível, é tomar $M = 0$ em (53) para obter a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2].$$

Adicionalmente, observa-se que, para $r \rightarrow \infty$ em (53), a métrica de Minkowski (1), que representa o espaço-tempo plano, sem curvatura gravitacional, é recuperada em coordenadas esféricas, evidenciando a solução de Schwarzschild apresenta um comportamento assintoticamente plano, ou seja, para grandes distâncias, a métrica de Schwarzschild (e, de forma mais geral, a de Kerr-Newman) se aproxima da métrica de Minkowski. Isso indica que o espaço-tempo ao redor de um buraco negro é assintoticamente plano, ou seja, longe do buraco negro, os efeitos gravitacionais se tornam desprezíveis, e o espaço-tempo se comporta como o espaço plano da relatividade especial.

5.2 Singularidades

Uma singularidade em um buraco negro é uma região do espaço-tempo onde quantidades físicas, como a curvatura (medida pelo tensor de Riemann ou pelo invariante de Kretschmann), tornam-se infinitas. Nessas condições, as leis da física, conforme conhecidas, deixam de ser aplicáveis. No contexto da solução de Kerr-Newman, que descreve um buraco negro com massa (M), momento angular (J) e carga elétrica (Q), a singularidade está associada ao colapso gravitacional do objeto central. Nesta seção, exploraremos as condições matemáticas que caracterizam a singularidade e os horizontes de eventos na métrica de Kerr-Newman.

Na métrica de Kerr-Newman, o elemento g_{rr} da métrica diverge quando $\Delta = 0$, indicando a presença do horizonte de eventos. O parâmetro Δ é definido como:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2,$$

onde $a = \frac{J}{M}$ é o momento angular por unidade de massa. A condição $\Delta = 0$ leva à equação quadrática:

$$r^2 - 2Mr + (a^2 + Q^2) = 0,$$

com $ar^2 + br + c = 0$, onde: $a = 1$; $b = -2M$; e $c = a^2 + Q^2$. Aplicando a fórmula de Bhaskara para essa equação:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow r = \frac{2M \pm \sqrt{4(M^2 - a^2 - Q^2)}}{2}.$$

Logo, obtemos as raízes:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}. \quad (54)$$

Quando a componente g_{tt} da solução de Kerr-Newman diverge com $\rho = 0$, obtemos o seguinte equacionamento na singularidade intrínseca:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta = 1 \end{cases}. \quad (55)$$

Para esses valores de r e θ , as coordenadas cartesianas elípticas em Kerr [2] ficam:

$$\begin{cases} x = a \sin \phi \\ y = -a \cos \phi \\ z = 0 \end{cases}.$$

Daí, note que $x^2 + y^2 = (a \sin \phi)^2 + (-a \cos \phi)^2 = a^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$, ou seja:

$$x^2 + y^2 = a.$$

Essa é a equação do círculo de raio a no equador do buraco ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Isso significa que a singularidade de Kerr tem a forma de anel.

Podemos rescrever a solução de Kerr-Newman (48) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left[-\frac{\Delta}{\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right] dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\
 & + \left[2\frac{\Delta}{\rho^2} a \sin^2 \theta - 2\frac{a(r^2 + a^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta \right] dt d\phi \\
 & + \left[-\frac{\Delta}{\rho^2} a^2 \sin^4 \theta + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right] d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{56}$$

Podemos comparar a Eq. (56) com a forma geral de ds^2 ,

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rt}drdt + g_{\theta t}d\theta dt + g_{\phi t}d\phi dt + g_{tr}dtdr + \dots + g_{t\phi}dtd\phi + \dots, \tag{57}$$

para concluir que:

$$\begin{cases}
 g_{tt} = \left[-\frac{\Delta}{\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right]; & g_{rt} = 0; \\
 g_{\theta t} = 0; & 2g_{t\phi} = \left[2\frac{\Delta}{\rho^2} a \sin^2 \theta - 2\frac{a(r^2 + a^2)}{\rho^2} \sin^2 \theta \right]; \\
 g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}; & g_{\theta\theta} = \rho^2; \\
 g_{\phi\phi} = \left[-\frac{\Delta}{\rho^2} a^2 \sin^4 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (r^2 + a^2)^2 \right].
 \end{cases} \tag{58}$$

Quando $\Delta = 0$, o componente g_{rr} diverge, indicando os horizontes de eventos. Quando $\rho = 0$, a métrica apresenta divergências associadas à singularidade em forma de anel.

5.3 Ergosfera

Vamos analisar o horizonte de eventos tomando $g_{tt} = 0$ —vide-se Eq. (58).

$$g_{tt} = 0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{\rho^2} + \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta = 0, \tag{59}$$

com $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$.

Multiplicando (59) por ρ^2 :

$$-\Delta + a^2 \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 \sin^2 \theta.$$

Substituindo a forma de $\Delta(r)$:

$$r^2 + (-2M)r + a^2 \left(\underbrace{1 - \sin^2 \theta}_{\cos^2 \theta} \right) + Q^2 = 0,$$

que é uma equação do segundo grau em r , resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$r_0^\pm = M \pm \sqrt{M^2 - (Q^2 + a^2 \cos^2 \theta)}.$$

Despreza-se o sinal negativo à frente da raiz pois nessa circunstância $r_0 < r_+$, o que corresponderia a eventos dentro do buraco (e não estamos interessados nisso). Logo:

$$r_0 \equiv r_0^+ = M + \sqrt{M^2 - (Q^2 + a^2 \cos^2 \theta)}. \quad (60)$$

sendo $r_+ < r_0^+ = r_0$. A ergosfera é a região do espaço que satisfaz: $r_+ < r < r_0$
Tomaremos as seguintes informações:

$$\begin{cases} ds = 0, & \text{raio de luz} \\ dr = 0, & \text{órbita a de raio fixo } (r = \text{constante}) . \\ d\theta = 0, & \text{órbita planar equatorial } (\theta = \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (61)$$

Substituindo os dados acima em (57):

$$0 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi} + dt d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2, \quad (62)$$

pois $g_{t\phi} = g_{\phi t}$.

Dividindo (59) por dt^2 :

$$0 = g_{tt} + 2g_{t\phi} \frac{d\phi}{dt} + g_{\phi\phi} \frac{d\phi^2}{dt^2}.$$

Dividindo por $g_{\phi\phi}$:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + 2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \left(\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} = 0,$$

que é uma equação do 2º grau em $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)$ e tem como solução:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{-2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{4\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}\right)}}{2(1)}.$$

Definimos

$$\Omega \equiv \frac{d\phi}{dt},$$

como a velocidade angular de um fóton— o que é consistente com a nossa hipótese (61). Logo,

$$\Omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \left(\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}\right)}. \quad (63)$$

Substituindo (59), $g_{tt} = 0$, em (63), encontramos a fórmula de Ω em $r = r_0$, o limiar da ergosfera— Fig. ??:

$$\Omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (r = r_0).$$

O sinal + está descartado pois implicaria em $\Omega = 0$, ou seja, uma partícula de luz em repouso, o que é um absurdo. Então:

$$\Omega = -2\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (r = r_0). \quad (64)$$

Acontece que a velocidade angular Ω é diretamente proporcional ao módulo J do momento angular,

$$J \propto \Omega.$$

Por isso, Ω e J têm o mesmo sinal.

$$\begin{cases} \Omega \text{ positivo} \Rightarrow J \text{ positivo} \\ \Omega \text{ negativo} \Rightarrow J \text{ negativo} \end{cases}.$$

Isso conta que a partícula de luz é arrastada com velocidade Ω pelo momento angular J do buraco negro.

No **horizonte de eventos**, onde $r = r_+$, $\Delta = 0$ e $g_{rr} \rightarrow \infty$. Ademais, tomaremos $\theta = \frac{\pi}{2}$ (equador), tal que:

$$\begin{cases} g_{tt} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 2g_{t\phi} = -2a(r^2 + a^2) \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \\ g_{\phi\phi} = \frac{\sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2}{\rho^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{tt} = \frac{a^2}{\rho^2} \\ g_{t\phi} = -a \frac{(r^2 + a^2)}{\rho^2} \\ g_{\phi\phi} = \frac{(r^2 + a^2)^2}{\rho^2} \end{cases}. \quad (65)$$

Devido à (65), a raiz quadrada na Eq. (63) para Ω , fica:

$$\sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \left(\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}\right)} = \frac{1}{|g_{\phi\phi}|} \sqrt{\frac{a^2}{\rho^4} (r^2 + a^2)^2 - \frac{a^2 (r^2 + a^2)^2}{\rho^2}} = 0,$$

Portanto, no horizonte $r = r_+$:

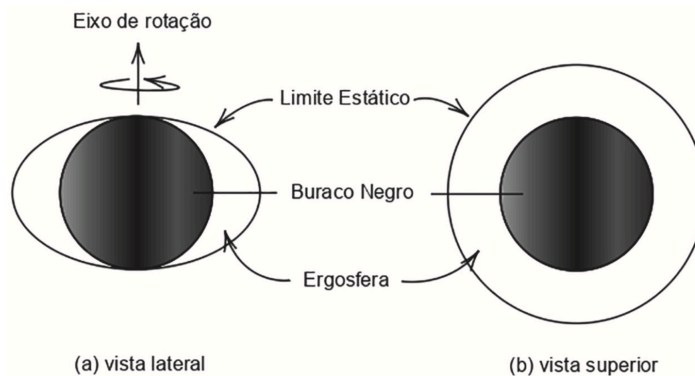
$$\Omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \quad (r = r_+),$$

na qual substituímos (65) para obter:

$$\Omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{a}{(r_+^2 + a^2)} \quad (r = r_+), \quad (66)$$

sendo esta a velocidade angular de rotação de um buraco negro.

Figura 4 – Representação da ergosfera de um buraco negro



5.4 Gravidade superficial (κ)

A gravidade superficial (κ) é a medida da intensidade do campo gravitacional na linha do horizonte de um buraco negro. Pode ser definida como a aceleração que uma partícula teste teria que sofrer, mantida fixa no horizonte do buraco negro, para não cair buraco adentro. Esta aceleração é aquela medida por um observador muito distante—i.e. no infinito.

Para um buraco negro de Kerr-Newman, com massa (M), momento angular ($J = Ma$) e a carga elétrica (Q), a gravidade superficial é definida para κ como [1]:

$$\kappa \equiv \frac{(r_+ - r_-)}{2(r_+^2 + a^2)}. \quad (67)$$

Especificando essa quantidade em termos de $\{M, J, Q\}$, temos:

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}{2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}}}. \quad (68)$$

Para o caso particular de Schwarzschild, $Q = J = 0$ e a expressão acima se simplifica para:

$$\kappa = \frac{1}{4M}. \quad (69)$$

Se a velocidade radial em Schwarzschild, pela Eq. (45), é $\dot{r} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}$, tomamos a aceleração radial em Schwarzschild da seguinte maneira:

$$\ddot{r} = +\frac{M}{\sqrt{\frac{2M}{r}}} \frac{1}{r^2} \dot{r}.$$

Usando, novamente, a Eq.(45) se torna em:

$$\ddot{r} = -\frac{M}{r^2}. \quad (70)$$

Como na superfície do horizonte de eventos de Schwarzschild, o raio é $r = 2M$, podemos substituir em (70):

$$\ddot{r} = -\frac{M}{(2M)^2} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{M}{4M^2} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{1}{4M}. \quad (71)$$

Ao substituirmos (69) em (71):

$$\ddot{r} = -\kappa,$$

que é a aceleração da partícula ao atravessar o horizonte. A aceleração da partícula, diretamente relacionada à κ , é, portanto, gravitacional.

5.5 Área do Buraco Negro

No estudo dos Buracos Negros, nos deparamos com um interessante tópico denominado como a área do Buraco Negro, que nada mais é que a área da superfície do horizonte de eventos, sendo esta a “fronteira” que separa o BN do restante do universo, onde tudo que atravessa esse limite não poderá mais escapar, incluindo a luz.

Para compreendermos melhor esse tópico, vamos realizar uma dedução partindo da seguinte equação:

$$dA = \sqrt{|g|}d^2x, \quad (72)$$

com $|g| = -g$, pois $g < 0$ na assinatura da métrica que usamos em 4D; $d^2x = d\theta d\phi$, pois estamos sobre a casca (elipsoidal) de $r = r_+ = \text{constante}$, o que ocorre em 2D. O fator $\sqrt{|g|}$ é o Jacobiano da transformação geral de coordenadas—conforme aprendemos nos cursos de Cálculo.

Portanto, a área será a integral ao longo de toda a superfície bidimensional do horizonte. Logo:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{g}d\theta d\phi, \quad (73)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ é calculado em $r = r_+$. Considere, novamente, a métrica de Kerr-Newmann, Eq. (56). No horizonte, onde $dt = dr = 0$ e $r = r_+$, temos $\Delta(r_+) = 0$ (conforme a Seção 5.2); logo:

$$ds^2 = \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} (r_+^2 + a^2)^2 d\phi^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (74)$$

sob as seguintes identificações:

$$\begin{cases} g_{22} = \rho^2; & g_{23} = 0; \\ g_{32} = 0; & g_{33} = \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} (r_+^2 + a^2)^2. \end{cases} \quad (75)$$

Devido à Eq.(75):

$$g = \sin^2\theta (r_+^2 + a^2)^2 = |g|.$$

Usando isso na Eq.(73):

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{\sin^2\theta (r_+^2 + a^2)^2} d\theta d\phi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta (r_+^2 + a^2) d\theta d\phi,$$

com $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2} = \text{constante}$, pela Eq.(54). Então:

$$A = 4\pi (r_+^2 + a^2). \quad (76)$$

Substituindo a Eq.(54) para r_+ e a Eq. (49) para a na Eq. (76):

$$A = 8\pi \left[2M - \frac{Q^2}{2} + M\sqrt{M^2 - Q^2 - \frac{J^2}{M^2}} \right]. \quad (77)$$

Vemos que a área do horizonte de eventos é determinada pelas três quantidades M , Q e J .

6 Termodinâmica de Buracos Negros

6.1 Leis Mecânicas dos Buracos Negros

Lei Zero

Descrevemos a lei zero das leis mecânicas de buracos negros como: *a gravidade superficial de um buraco negro é uniforme, em todo o horizonte de eventos*. Tal definição nos permite compreender que, sendo esse conceito geral, dois buracos negros, estando suficientemente próximos um do outro, a interação denominada como efeito gravitacional, similar à força de maré exercida entre eles, ocasionará na geração de uma geometria complexa que não é completamente descrita na solução de Kerr-Newman, mas que mantêm a ideia proposta pela lei zero.

De forma comparativa, na termodinâmica clássica, a lei zero descreve que, para um sistema em equilíbrio termodinâmico, a temperatura é a mesma em todos os lugares desse sistema. Logo, aplicando tal definição para a teoria de buracos negros, a gravidade superficial κ está relacionada com os buracos negros assim como a temperatura para um sistema termodinâmico, ou seja, permanece a mesma para todos os pontos de um buraco negro.

Primeira lei

A primeira lei da termodinâmica de buracos negros é escrita em termo da variação de massa δM , da variação de área δA , da variação da carga δQ e da variação de momento angular δJ , como:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A - \Phi \delta Q + \Omega \delta J, \quad (78)$$

Ela também é conhecida como a primeira lei da mecânica de buracos negros. Nela aparecem também:

- κ : gravidade superficial do horizonte.
- Φ : potencial elétrico do buraco negro, dado por:

$$\Phi \equiv -\frac{Qr_+}{\alpha}. \quad (79)$$

- Ω : velocidade angular do horizonte, que é:

$$\Omega \equiv \frac{J}{\alpha M}, \quad (80)$$

onde

$$\alpha \equiv \frac{A}{4\pi}. \quad (81)$$

A relação (78) é análoga à primeira lei da termodinâmica:

$$\delta U = T \delta S - p \delta V, \quad (82)$$

se κ estiver relacionada a temperatura T . Em (82), δU é a variação da energia interna do sistema, δS é sua variação de entropia, δV a variação de volume e p é a pressão.

Segunda lei

A segunda lei dos buracos negros, também chamada de lei das áreas, foi formalizada por Stephen Hawking em 1971. Essa lei estabelece que a área da superfície de um buraco negro nunca diminui, expressa matematicamente como:

$$\delta A \geq 0. \quad (83)$$

Tal princípio apresenta uma notável semelhança com a segunda lei da termodinâmica, que afirma que a entropia de um sistema termodinâmico isolado nunca decresce: $\delta S \geq 0$. Essa correspondência entre o aumento da área de um buraco negro e o crescimento da entropia fundamenta a analogia entre as leis mecânicas dos buracos negros e os princípios da termodinâmica, estabelecendo uma ponte conceitual entre a física gravitacional e a termodinâmica clássica.

6.2 Efeito Hawking

A relação entre as leis termodinâmicas e as leis dos buracos negros era considerada apenas uma analogia enquanto se manteve o contexto da física clássica. Contudo, a introdução de efeitos quânticos, conforme demonstrado por Stephen Hawking em 1975, transforma completamente essa perspectiva.

A Teoria Quântica de Campos revela que o espaço-tempo é permeado por campos que sofrem flutuações energéticas constantes, gerando pares de partículas virtuais—como elétrons e pósitrons—que surgem do vácuo e se aniquilam rapidamente. Hawking demonstrou que, nas proximidades do horizonte de eventos de um buraco negro, esses pares podem se separar: uma partícula é capturada pelo buraco negro, enquanto a outra escapa para o infinito. Quando a antipartícula é absorvida, o buraco negro perde energia equivalente à da partícula que escapa, mas com sinal oposto, criando o efeito de emissão de radiação para observadores distantes.

Essa radiação, conhecida como radiação Hawking, é percebida por observadores externos como a emitida por um corpo negro com temperatura dada por:

$$T_{BN} = \frac{\kappa}{\pi}, \quad (84)$$

onde κ é a gravidade superficial. Relacionando κ à área A do horizonte de eventos, definindo assim a entropia do buraco negro como:

$$S_{BN} = \frac{A}{4}, \quad (85)$$

Esse resultado confirma que a analogia entre as leis dos buracos negros e a termodinâmica reflete um comportamento termodinâmico intrínseco desses objetos. Em essência, buracos negros podem ser entendidos como regiões do espaço-tempo que emitem radiação de corpo negro a uma temperatura T_{BN} .

6.3 Aplicação: evaporação de um buraco negro com a massa do Sol

Tomando um buraco negro de Schwarzschild, temos que a temperatura é dada por:

$$T_{BN} = \frac{1}{8\pi M}. \quad (86)$$

Nesta equação, as unidades são tais que $\bar{h} = c = k = 1$. Podemos re-introduzir essas constantes:

$$T_{BN} = \frac{\bar{h}c^3}{8\pi Gkm}. \quad (87)$$

Pela lei de Stefan-Boltzmann:

$$\frac{P}{A} = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \bar{h}^3} T^4, \quad (88)$$

Substituindo T por T_{BN} , :cf. a Eq. (87) e usando que

$$A = 4\pi r_S^2 = 4\pi \left(\frac{2Gm}{c^2} \right)^2 \quad (89)$$

temos:

$$P = \frac{\bar{h}c^6}{15350\pi G^2 m^2}. \quad (90)$$

A equação da energia em repouso é dada por:

$$E = mc^2. \quad (91)$$

Suponha que $m = m(t)$. Então, a Eq. (91) impõe que $E = E(t)$. Diferenciando a Eq. (91) com respeito à t :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (mc^2) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}. \quad (92)$$

A potência P é:

$$P = \frac{(\text{energia})}{(\text{tempo})} = -\frac{dE}{dt}, \quad (93)$$

onde o sinal negativo aparece por conta da energia ser emitida para este caso.

Substituindo (93) em (92):

$$-P = c^2 \frac{dm}{dt} \Rightarrow - \left[\frac{\bar{h}c^6}{15350\pi G^2 m^2} \right] = c^2 \frac{dm}{dt},$$

Definimos

$$b = \frac{\bar{h}c^6}{15350\pi G^2}, \quad (94)$$

e integramos a equação acima para obter:

$$\frac{m^3}{3} = -\frac{b}{c^2} t + C \Rightarrow m^3 = -3bc^{-2}t + C. \quad (95)$$

Pela condição de contorno: $t = 0 \Rightarrow m = m_0$. Usando isso em (95):

$$m_0^3 = -3bc^{-2}(0) + C \Rightarrow C = m_0^3. \quad (96)$$

Substituindo (96) em (95):

$$m = (m_0^3 - 3\beta t)^{\frac{1}{3}}. \quad (97)$$

onde $\beta = \frac{b}{c^2}$.

Para o caso de evaporação do buraco negro, $m = 0$ (desaparecimento do BN) têm-se, de (97):

$$t_{\text{evap}} = \frac{m_0^3}{3\beta} \quad (\text{tempo de evaporação}). \quad (98)$$

Isso dá o tempo de evaporação de um buraco negro de massa m_0 . Podemos estimar t_{evap} para um buraco negro de uma massa solar ($m_0 = M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30} \text{kg}$) usando o valor numérico de $\beta = b/c^2$ [Eq. (94)]. O resultado é: $t_{\text{evap}} = 2,09 \times 10^{67}$ anos. Isso é muito maior que a idade do universo, $\sim 10^{10}$ anos.

7 Buracos Negros com G e c co-variáveis

Vamos considerar a hipótese de que as constantes fundamentais da gravitação e da velocidade da luz possam variar levemente com o tempo. Especificamente, assumimos:

$$G(t) = G_0 + \delta G(t), \quad |\delta G| \ll 1, \quad (99)$$

e

$$c(t) = c_0 + \delta c(t), \quad |\delta c| \ll 1. \quad (100)$$

A hipótese de acoplamentos físicos variáveis é respaldada por diversas pesquisas atuais ligadas à gravitação e cosmologia. Ademais o próprio Einstein chegou a considerar a possibilidade de uma velocidade da luz c variável. Dirac introduziu a teoria dos grandes números para defender a idéia de que o acoplamento gravitacional Newtoniano G também seria uma função do tempo. Brans e Dicke deram um passo além do de Dirac para defender a variação de G tanto no tempo quanto no espaço; eles o fizeram numa tentativa de implementar o princípio de Mach à teoria de gravidade de Einstein.

A introdução de acoplamentos físicos variáveis leva a resultados interessantes do ponto de vista da cosmologia, pois pode explicar observações relacionadas ao universo inflacionário, bem como podem solucionar problemas como o da energia escura e da matéria escura.

Com essa motivação em mente, pretendemos iniciar abaixo o estudo de como G e c variáveis poderiam modificar a estrutura geométrica dos buracos negros, bem como a termodinâmica a eles associada.

Primeiro, interessa saber se e como a métrica de Minkowski poderia ser modificada. A métrica do espaço-tempo plano de Minkowski, modificada para incluir a possível variação de $c(t)$, é:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2(t) dt^2.$$

Substituindo $c(t) = c_0 + \delta c(t)$, temos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - [c_0 + \delta c(t)]^2 dt^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - [c_0^2 + 2c_0\delta c + \delta c^2] dt^2. \end{aligned}$$

Note-se que:

$$|\delta c| \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \delta c^2 \approx 0 \\ \delta c dt^2 \sim 0 \end{cases}.$$

Sendo $|\delta c| \ll 1$, podemos desprezar os termos de segunda ordem, como δc^2 , obtendo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c_0^2 dt^2. \quad (101)$$

Logo a métrica de Minkowski não é modificada em primeira ordem de perturbação. Logo, as Eqs. (2), (3), (4) da Ref. [1] não se modificam em primeira ordem.

Por outro lado, as coordenadas do espaço-tempo são agora dadas por:

$$x^\mu = \begin{cases} x^0 = [c_0 t + \delta c(t) t] \\ x^i = \mathbf{x} = (x, y, z) \end{cases}.$$

Logo, a coordenada x^0 muda no cenário de c variável, diferentemente do que vemos na Eq. (2).

Porém as Eqs. (3) e (4) não mudam: o ds^2 de Minkowski não muda (porque desprezamos infinitésimos de ordem maior que 1). Então, ao compararmos a Eq. (4),

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

com a Eq. (101), continuamos concluindo que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad (102)$$

que é a própria Eq. (3).

Como as Eqs. (8) e (14) são Minkowski em coordenadas esféricas e como a métrica de Minkowski não muda, então as Eqs. (8) e (14) também não muda no contexto de c variável.

A Eq. (15), que dá a equação de campo de Einstein, muda para:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi \frac{G(t)}{c^4(t)} T_{\mu\nu}, \quad (103)$$

ou seja, admitimos que o coeficiente do conteúdo de matéria $T_{\mu\nu}$ evolui no tempo. Vamos estudar esse coeficiente tendo em vista a abordagem perturbativa estabelecida em (99) e (100). Note que:

$$\begin{aligned} \frac{G(t)}{c^4(t)} &= G(t) c^{-4}(t) = [G_0 + \delta G(t)] [c_0 + \delta c(t)]^{-4} \\ &= [G_0 + \delta G] \left[c_0 \left(1 + \frac{\delta c}{c_0} \right) \right]^{-4} = [G_0 + \delta G] \left[c_0^{-4} \left(1 + \frac{\delta c}{c_0} \right)^{-4} \right]. \end{aligned}$$

Porém,

$$\left| \frac{\delta c}{c_0} \right| \lll 1.$$

Por isso, podemos usar o resultado (binômio de Newton ou série de Taylor): $(1+x)^n \simeq 1 + nx + \mathcal{O}(x^2)$. Com isso,

$$\left(1 + \frac{\delta c}{c_0} \right)^{-4} \simeq 1 - 4 \frac{\delta c}{c_0} + \mathcal{O} \left[\left(\frac{\delta c}{c_0} \right)^2 \right],$$

e temos:

$$\frac{G(t)}{c^4(t)} = \left[\frac{G_0}{c_0^4} + \frac{G_0}{c_0^4} \left(\frac{\delta G}{G_0} - 4 \frac{\delta c}{c_0} \right) \right]. \quad (104)$$

Substituindo (104) na equação de Einstein generalizada, Eq. (103), temos:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_0}{c_0^4} T_{\mu\nu}}_{\text{Relatividade Geral}} + \underbrace{\frac{8\pi G_0}{c_0^4} \left(\frac{\delta G}{G_0} - 4 \frac{\delta c}{c_0} \right) T_{\mu\nu}}_{\text{Extra: gravidade modificada}}. \quad (105)$$

Note-se que no vácuo, $T_{\mu\nu} = 0$ e somem a fonte de gravitação (termo vermelho, lado direito) e também o termo (azul) de variação de G e c . Por essa razão, podemos dizer que G e c variáveis só produzem efeitos práticos quando em acoplamento com a matéria e energia; no vácuo, não existem efeitos mensuráveis de G e c variáveis.

Uma maneira de eliminar o termo extra (azul), na presença de $T_{\mu\nu}$, e não mudar a Relatividade Geral é tomar

$$\frac{\delta G}{G_0} - 4 \frac{\delta c}{c_0} = 0 \Rightarrow \frac{\delta G}{G_0} = 4 \frac{\delta c}{c_0}. \quad (106)$$

Isso significa que a variação de G é vinculada à variação de c . Dizendo de outra forma, se descobirmos como c varia (determinando δc), então, automaticamente conheceremos δG . Este último varia 4 vezes mais que o primeiro. Vamos trabalhar com essa hipótese.

Conclusão: a equação de Einstein, Eq. (15) não muda se vale $\frac{\delta G}{G_0} = 4 \frac{\delta c}{c_0}$. Chamaremos esse cenário de “Perturbed CPC for BH”, do inglês: “Perturbed Co-varying Physical Couplings for Black Holes”.

Sob a condição (106), a equação de Einstein permanece válida. Por isso, a solução estática esfericamente simétrica, continua sendo a métrica de Schwarzschild, Eq. (18):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (107)$$

onde, a massa geométrica M é dada por

$$2M = \frac{2Gm}{c^2},$$

e m é a massa de repouso da fonte.

Entretanto, vamos assumir que $M = M(t)$ pois

$$G(t) = G_0 + \delta G(t) \quad |\delta G| \ll 1$$

$$c(t) = c_0 + \delta c(t) \quad |\delta c| \ll 1$$

Como M depende simultaneamente de G e c , pequenas variações δG e δc modificam diretamente a massa geométrica. Sob o vínculo $\delta G/G_0 = 4\delta c/c_0$, segue-se que $\delta c/c_0 = (1/4)(\delta G/G_0)$. Assim, a contribuição de δc para δM é quatro vezes menor que a de δG . Portanto, a variação efetiva de M é dominada pela perturbação δG .

Temos, então:

$$\frac{M}{m} = \frac{G}{c^2},$$

i.e.

$$\frac{M}{m} \simeq \frac{G_0}{c_0^2} \left\{ 1 + \left[\frac{\delta G}{G_0} - 2 \frac{\delta c}{c_0} \right] \right\},$$

em que vale o vínculo,

$$\frac{\delta G}{G_0} = 4 \frac{\delta c}{c_0} \Rightarrow \frac{\delta c}{c_0} = \frac{1}{4} \frac{\delta G}{G_0} \quad (\text{Perturbed CPC}).$$

Substituindo o vínculo $\delta c/c_0 = (1/4)(\delta G/G_0)$ no termo perturbativo $\delta G/G_0 - 2\delta c/c_0$, obtemos: $\delta G/G_0 - 2(1/4)(\delta G/G_0) = (1/2)(\delta G/G_0)$. Logo, a contribuição de δc é

necessariamente menor e aparece como termo induzido por δG . A evolução temporal de $M(t)$ é, portanto, essencialmente determinada por $\delta G(t)$.

Logo,

$$2M = \frac{2G_0 m}{c_0^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right).$$

Definimos a massa geométrica original (constante) como

$$2M_0 \equiv \frac{2G_0 m}{c_0^2} \quad (\text{massa geométrica constante}).$$

Assim,

$$2M = 2M_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right). \quad (108)$$

Essa é a generalização da Eq. (19).

Podemos retornar esse resultado no elemento de linha de Schwarzschild (107) para escrever:

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right] c^2 dt^2 + \frac{1}{\left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right]} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

onde $c(t) = c_0 + \delta c(t)$. Porém, conforme estudamos acima, vale

$$c^2 dt^2 \simeq c_0^2 dt^2.$$

em primeira ordem. Logo,

$$ds^2 = - \left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right] c_0^2 dt^2 + \frac{1}{\left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right]} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (109)$$

que é a generalização de Schwarzschild para G e c variáveis, Eq. (18). Logo, teremos uma modificação na estrutura causal do espaço-tempo advinda do termo extra $\frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0}$. Com efeito:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} - \left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

embora a Lagrangiana permaneça na forma

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Lembramos que:

$$x^\mu = \begin{cases} x^0 = [c_0 t + \delta c(t) t] \\ x^i = \mathbf{x} = (r, \theta, \phi) \end{cases},$$

onde o ponto representa a derivada com respeito ao parâmetro afim λ . Logo,

$$2L = g_{00} \{ [c_0 + \delta c(t)] \dot{t} + \delta \dot{c}(t) t \}^2 + g_{11} \dot{r}^2 + g_{22} \dot{\theta}^2 + g_{33} \dot{\phi}^2.$$

Vamos trabalhar com o primeiro termo separadamente:

$$g_{00} \{ [c_0 + \delta c(t)] \dot{t} + \delta \dot{c}(t) t \}^2 \simeq g_{00} \{ [c_0^2 + 2c_0 \delta c(t) + \delta c^2(t)] \dot{t}^2 + 2 [c_0 \dot{t} \delta \dot{c}(t) t] \},$$

pois desprezamos infinitésimos de segunda ordem: $\delta c(t) \delta \dot{c}(t) \simeq 0$; $\delta \dot{c}^2(t) \simeq 0$. Note-se também que: $\delta c^2(t) \simeq 0$. Logo,

$$g_{00} \{ [c_0 + \delta c(t)] \dot{t} + \delta \dot{c}(t) t \}^2 \Rightarrow \simeq \left\{ - \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) + \left[\frac{2M_0}{r} \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right] \right\} \{ c_0^2 \dot{t}^2 + [2c_0 \delta c(t) \dot{t}^2 + 2c_0 \delta \dot{c}(t) t \dot{t}] \}$$

Note-se que os termos entre colchetes na última passagem dizem respeito à modificação do cenário “Perturbed CPC for BH”. Fazendo as distributivas e desprezando infinitésimos de ordem superior:

$$\begin{aligned} g_{00} \{ [c_0 + \delta c(t)] \dot{t} + \delta \dot{c}(t) t \}^2 &\simeq - \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) c_0^2 \dot{t}^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) \left[2c_0^2 \frac{\delta c(t)}{c_0} \dot{t}^2 + 2c_0^2 \frac{\delta \dot{c}(t)}{c_0} t \dot{t} \right] \\ &\quad + \left[\frac{2M_0}{r} \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right] c_0^2 \dot{t}^2. \end{aligned}$$

Os dois últimos termos da equação acima não são independentes devido ao vínculo (106). Com ele, temos:

$$\begin{aligned} g_{00} \{ [c_0 + \delta c(t)] \dot{t} + \delta \dot{c}(t) t \}^2 &\simeq - \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \left(1 - 2 \frac{2M_0}{r} \right) \right] c_0^2 \dot{t}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\delta \dot{G}}{G_0} \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) c_0^2 t \dot{t}. \end{aligned}$$

Voltamos à expressão de $2L$:

$$2L = g_{00} \{ [c_0 + \delta c(t)] \dot{t} + \delta \dot{c}(t) t \}^2 + g_{11} \dot{r}^2 + g_{22} \dot{\theta}^2 + g_{33} \dot{\phi}^2,$$

e usamos os valores de g_{ii} . Temos:

$$\begin{aligned} 2L &= - \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \left(1 - 2 \frac{2M_0}{r} \right) \right] c_0^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta \dot{G}}{G_0} \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) c_0^2 t \dot{t} \\ &\quad + \frac{1}{\left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right]} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

Para trajetórias radiais de partículas não-massivas —**tipo luz**, temos:

$$2L = \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0 \quad (\text{trajetórias tipo luz}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2L &= - \left[\left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \left(1 - 2 \frac{2M_0}{r} \right) \right] c_0^2 \dot{t}^2 - \frac{1}{2} \frac{\delta \dot{G}}{G_0} \left(1 - \frac{2M_0}{r} \right) c_0^2 t \dot{t} \\ &\quad + \left[1 - \frac{2M_0}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta G}{G_0} \right) \right]^{-1} \dot{r}^2, \end{aligned}$$

Esta é a generalização da Eq. (30):

$$2L = - \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right) c_0^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M_0}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \quad (\text{RG}).$$

Nossa próxima tarefa é encontrar as derivadas que aparecem na equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0,$$

para estudar a trajetória de partículas no espaço-tempo de Schwarzschild na presença de acoplamentos físicos co-variáveis. Isso será feito no futuro como continuação deste trabalho. O estudo da termodinâmica do cenário "Perturbed CPC for BH" também fica para o futuro.

8 Conclusão

O trabalho apresenta uma trajetória conceitual e matemática do desenvolvimento da Física Moderna até os estudos atuais sobre buracos negros. Inicia-se com o contexto histórico dos séculos XIX e XX, destacando a formulação da Relatividade Especial e a estrutura do espaço-tempo de Minkowski, com ênfase nos intervalos, relações de causalidade e cones de luz. Em seguida, aborda-se a Relatividade Geral e suas equações fundamentais, que permitem a obtenção de soluções como o espaço-tempo de Schwarzschild e, posteriormente, o de Kerr-Newman, explorando aspectos como singularidades, ergosfera, gravidade superficial e área do horizonte de eventos.

O estudo avança para a termodinâmica dos buracos negros, incluindo as leis mecânicas, o efeito Hawking e a análise da evaporação de um buraco negro estelar. Por fim, introduz-se a possibilidade inovadora de tratar G e c como variáveis, abrindo novas perspectivas teóricas para a compreensão da estrutura causal e da termodinâmica dos buracos negros. Esses dois últimos aspectos serão abordados em uma continuação desta pesquisa.

Durante a elaboração do trabalho, foram realizadas duas apresentações em eventos, sendo a primeira no PPGF UNIFAL-MG/UFSJ International Conference on Multimessenger Astrophysics, intitulada como “Preliminary Studies on Black Holes”. A segunda participação em evento com apresentação de trabalho foi no X Simpósio da UNIFAL-MG, com o poster intitulado como “Análise Preliminar sobre a Termodinâmica de Buracos Negros”. Em ambas apresentações, o conteúdo apresentado foi o material desenvolvido até as datas das apresentações. Para o XI Simpósio da UNIFAL-MG, foi apresentado o projeto com o título “Buracos Negros: geometria e termodinâmica” contendo os últimos avanços reportados nesta monografia.

Os resultados alcançados até o momento abrem espaço para desdobramentos significativos no aprofundamento da proposta CPC. Como perspectiva futura, pretende-se concluir os cálculos considerando G e c variáveis, o que permitirá uma análise mais completa da estrutura causal no caso CPC–Schwarzschild. Na sequência, o objetivo é avançar para o desenvolvimento do cenário CPC–Kerr–Newman, ampliando a aplicabilidade do tratamento a geometrias mais gerais.

Outro tópico fundamental será o estudo da termodinâmica de buracos negros (BN) dentro do formalismo CPC, especialmente no que se refere à compatibilidade entre a estrutura causal modificada e as leis fundamentais da termodinâmica gravitacional. Tais investigações poderão oferecer novos elementos de interpretação tanto para a física de horizontes quanto para possíveis correções em regimes de alta energia.

Por fim, há a intenção de consolidar esses resultados em um artigo científico, visando anunciar as descobertas sobre o tratamento CPC para buracos negros e suas implicações termodinâmicas, contribuindo para o debate contemporâneo em gravitação e cosmologia teórica.

REFERÊNCIAS

- [1] FELIPE, B. S.; OLIVEIRA, J. de. Introdução aos buracos negros e sua termodinâmica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 46, e20240010, 2024.
- [2] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity**. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- [3] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física: óptica e física moderna**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 4.
- [4] NASCIMENTO, G. G. G. do; CUZINATTO, R. R. Preliminary studies on black holes. In: **PPGF UNIFAL-MG/UFSJ International Conference on Multimessenger Astrophysics**. Poços de Caldas: Universidade Federal de Alfenas, [2024]. Disponível em: <https://agenda.infn.it/event/40916/book-of-abstracts.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2024.
- [5] NASCIMENTO, N. L. N. S.; CUZINATTO, R. R. Ondas gravitacionais de buracos negros coalescentes: um estudo quantitativo a partir de física básica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 44, e20220004, 2022.
- [6] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: óptica, relatividade e física quântica**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2013. v. 4.
- [7] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.