

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALFENAS

VITÓRIA FERNANDA BELO CAMPOS

EXPLORANDO O MODELO DE STAROBINSKY E A EXTENSÃO COM
O TERMO R^3 NA AÇÃO: IMPLICAÇÕES PARA A INFLAÇÃO

POÇOS DE CALDAS/MG

2025

VITÓRIA FERNANDA BELO CAMPOS

EXPLORANDO O MODELO DE STAROBINSKY E A EXTENSÃO COM
O TERMO R^3 NA AÇÃO: IMPLICAÇÕES PARA A INFLAÇÃO

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física Teórica.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinato

POÇOS DE CALDAS/MG

2025

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal de Alfenas
Biblioteca Campus Poços de Caldas

Belo Campos, Vitória Fernanda.

Explorando o modelo de Starobinsky e a extensão com o termo R^3 na ação : implicações para a inflação / Vitória Fernanda Belo Campos. - Poços de Caldas, MG, 2025.

196 f. : il. -

Orientador(a): Rodrigo Rocha Cuzinato.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Alfenas, Poços de Caldas, MG, 2025.

Bibliografia.

1. Cosmologia Padrão. 2. Inflação. 3. Starobinsky. 4. Extensão. 5. Parâmetros Cosmológicos. I. Rocha Cuzinato, Rodrigo, orient. II. Título.

VITÓRIA FERNANDA BELO CAMPOS

EXPLORANDO O MODELO DE STAROBINSKY E A EXTENSÃO COM O TERMO π^3 NA AÇÃO: IMPLICAÇÕES PARA A INFLAÇÃO

O Presidente da banca examinadora abaixo assina a aprovação da Dissertação apresentada como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestra em Física pela Universidade Federal de Alfenas. Área de concentração: Física Teórica

Aprovada em: 10 de março de 2025.

Prof. Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto
Presidente da Banca Examinadora
Instituição: Universidade Federal de Alfenas

Prof. Dr. Léo Gouvêa Medeiros
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Rodrigo Santos Bufalo
Instituição: Universidade Federal de Lavras



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Rocha Cuzinatto, Professor do Magistério Superior**, em 10/03/2025, às 17:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unifal-mg.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1468287** e o código CRC **0CD9F9C0**.

Dedico este trabalho à Vânia, Mauro, Ede-
zio, Javier, Eddie e Kiara.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, inicialmente, aos meus pais, que fomentaram o início desta jornada, permitindo-me estudar uma área nem sempre valorizada pela sociedade, e ao longo do tempo compreenderam a imensa importância que ela tinha para mim. Me forneceram suporte emocional e financeiro durante toda a minha vida. Muito obrigada.

Agradeço à minha família por estar ao meu lado durante toda a caminhada e por, aos poucos, se adaptarem à cientista que surgia entre eles, entendendo minhas ausências e me recebendo, periodicamente, sempre com muito amor e carinho. Obrigada por demonstrarem afeto e por mostrarem que, independentemente do tempo que passe, sempre terei para onde retornar.

Agradeço aos meus amigos por terem crescido junto comigo e por permanecerem ao meu lado, independentemente de qualquer situação ou afastamento. Obrigada por me aceitarem e por me fazerem imensamente feliz. Obrigada a cada um que se uniu a mim em cada etapa. Em especial, no meu mestrado, agradeço às meninas que moraram comigo. Elas me acolheram em uma cidade nova e me apoiaram não somente nas dificuldades acadêmicas, mas também na vida pessoal.

Agradeço ao meu companheiro pela cumplicidade e por colaborar na evolução da minha carreira, com o enorme privilégio de me ajudar com minhas dúvidas e me oferecer o afago que, muitas vezes, meu coração precisava para não desistir.

Agradeço ao meu orientador por toda a paciência, pelos conselhos voltados para o meu crescimento profissional, pela flexibilidade, pela compreensão e pelos ensinamentos. Agradeço também aos professores que contribuíram para a minha formação como mestra e estiveram presentes ao longo desta caminhada.

Agradeço, profundamente, a Deus pelo dom da vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos as características essenciais da Relatividade Geral e da Cosmologia Padrão, com o objetivo de compreender o Paradigma Inflacionário. Desde 1980, os modelos inflacionários passaram a ser elementos fundamentais para teorias que buscam entender o Universo primordial. As medições obtidas por meio da análise observacional da Radiação Cósmica de Fundo podem ser comparadas com as previsões dos modelos inflacionários, proporcionando testes rigorosos para as previsões feitas. Assim, discutimos os problemas do Modelo Cosmológico Padrão (por exemplo, o problema do horizonte, o problema da planura e as correlações no superhorizonte) e como esses problemas podem ser resolvidos ao se adicionar um período de expansão acelerada nos primeiros momentos do Universo. Descrevemos a física da inflação e estudamos a dinâmica do campo escalar *inflaton* ϕ , responsável pela expansão exponencial do espaço, por meio da equação de movimento e da aproximação de slow-roll para os parâmetros fundamentais da inflação: ε e η . Esses parâmetros, por sua vez, possibilitaram o cálculo do índice espectral n_s e da razão tensorial-escalar r para os modelos de inflação quadrática, de Starobinsky e para a extensão do modelo de Starobinsky, na qual propomos a adição do escalar de curvatura cúbica na ação. Após a descrição da inflação, analisamos minuciosamente o comportamento do Modelo de Starobinsky e discutimos o problema associado a ele. A lacuna introduzida por esse problema foi o ponto de partida para a introdução do termo R^3 e para a análise das consequências dessa adição.

Palavras-chave: Cosmologia Padrão; Inflação; Starobinsky; Extensão; Parâmetros Cosmológicos.

ABSTRACT

In this work, we study the essential characteristics of General Relativity and Standard Cosmology, with the aim of understanding the Inflationary Paradigm. Since 1980, inflationary models have become key components for theories that seek to understand the primordial Universe. Measurements obtained through observational analysis of the Cosmic Microwave Background can be compared with the predictions of inflationary models, offering rigorous tests of the proposed outcomes. Thus, we discuss the problems of the Standard Cosmological Model (for example, the horizon problem, the flatness problem, and superhorizon correlations) and how these problems can be resolved by adding a period of accelerated expansion in the early moments of the Universe. We describe the physics of inflation and study the dynamics of the inflaton scalar field ϕ , responsible for the exponential expansion of space, through the equation of motion and the slow-roll approximation for the fundamental inflationary parameters: ε and η . These parameters, in turn, enabled the calculation of the spectral index n_s and the tensor-to-scalar ratio r for quadratic inflation models, Starobinsky's model, and the extension of the Starobinsky model, where we propose the addition of the cubic curvature scalar term in the action. After the description of inflation, we thoroughly analyze the behavior of the Starobinsky Model and discuss the issues associated with it. The gap introduced by this issue was the starting point for the introduction of the R^3 term and for the analysis of the consequences of this addition.

Keywords: Standard Cosmology; Inflation, Starobinsky; Extension; Cosmological Parameters.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de coordenadas esféricas	18
Figura 2 – Evolução das densidades de energia no Universo	28
Figura 3 – Diagrama de espaço-tempo	34
Figura 4 – Ilustração do Problema do Horizonte	35
Figura 5 – Resolução do Problema das correlações do super-horizonte	37
Figura 6 – Exemplo de potencial <i>slow-roll</i>	38
Figura 7 – Potencial de Starobinsky no <i>frame</i> de Jordan	56
Figura 8 – Potencial de Starobinsky no <i>frame</i> de Einstein	59
Figura 9 – Parâmetro <i>slow-roll</i> $\varepsilon_V(\phi)$ com região inflacionária destacada	61
Figura 10 – Análise do comportamento do potencial de Starobinsky quando alterado α	68
Figura 11 – Potenciais no <i>frame</i> de Jordan para os dois modelos inflacionários	76
Figura 12 – Potenciais no <i>frame</i> de Einstein para os dois modelos inflacionários	79
Figura 13 – Gráfico ε_V <i>versus</i> ϕ em unidades de Planck	83
Figura 14 – Gráfico de η_V <i>versus</i> ϕ escrito em unidades de Planck	85
Figura 15 – Gráfico de ε_V e de η_V <i>versus</i> ϕ escrito em unidades de Planck	86
Figura 16 – Espaço de fase da extensão do Modelo de Starobinsky	88
Figura 17 – Gráfico $\varepsilon_V(\phi)$ <i>versus</i> δ	99
Figura 18 – Ilustração de curvas que conectam dois pontos em um espaço-tempo	127
Figura 19 – Evolução de duas geodésicas com separação B_μ num espaço-tempo curvo	130
Figura 20 – Superfície esférica	146

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cálculo do deslocamento do campo <i>inflaton</i> para diferentes valores de α_0	99
Tabela 2 – Resultados numéricos para os parâmetros n_s e r , conforme a variação de α_0 , para $N = 50$ e $N = 60$	103

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	COSMOLOGIA PADRÃO	15
2.1	Espaços tridimensionais simétricos	16
2.2	Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	19
2.3	Equação de Continuidade FLRW	20
2.4	Curvatura do Espaço-Tempo	23
2.5	Equações de Friedmann	25
2.6	Soluções Exatas	28
3	INFLAÇÃO CÓSMICA	32
3.1	Esfera de Hubble Contraíndo	33
3.2	A física da inflação	37
3.3	Dinâmica do Campo Escalar	38
3.4	Inflação <i>Slow-Roll</i>	44
3.4.1	Um campo rolando lentamente	44
3.4.2	Aproximação <i>slow-roll</i>	46
3.4.3	Estudo de caso: Inflação quadrática	48
4	MODELO DE STAROBINSKY	52
4.1	Multiplicador de Lagrange	53
4.2	<i>Frame</i> de Jordan	54
4.3	Transformação conforme e <i>frame</i> de Einstein	56
4.4	Dinâmica de <i>slow-roll</i>	60
4.5	Parâmetros Cosmológicos	63
4.5.1	Tilt escalar n_s	63
4.5.2	Amplitude escalar	66
4.6	Motivação para incluir o termo R^3	68
5	ADICIONANDO R^3 NA AÇÃO DE STAROBINSKY	72
5.1	<i>Frame</i> de Einstein	77
5.2	Equações de movimento	80
5.3	Dinâmica <i>slow-roll</i> do modelo Starobinsky + R^3	80
5.4	Parâmetro η	84
5.5	Espaço de fase	87
5.6	Número de N <i>e-folds</i>	89
5.7	Parâmetros ε e η escritos em função de N	96
5.8	Parâmetros cosmológicos	102
6	CONCLUSÕES	105
	REFERÊNCIAS	110
	APÊNDICES	120

1 INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Geral (RG) é uma extensão da Teoria da Relatividade Restrita, sendo formulada por Albert Einstein com o objetivo de compreender, dentro de um contexto mais amplo, o papel dos referenciais não-inerciais nas leis da física. Em 1915, Einstein propôs que, em uma região suficientemente pequena do espaço, o campo gravitacional poderia ser descrito como equivalente a um referencial inercial, no qual não há forças atuando, exceto o movimento em um espaço curvado. De acordo com essa visão, não existe uma força de gravidade propriamente dita; o que ocorre é a curvatura do espaço-tempo, que é gerada pela presença de massa e energia (Dahmen, 2022).

Em 1917, Einstein (Einstein, 1917) propôs um modelo cosmológico estático fundamentado no Princípio Cosmológico (PC), uma generalização do princípio copernicano, que postula a extensão da homogeneidade e isotropia do espaço à dimensão temporal. Quando a RG foi formulada, o conhecimento sobre o Universo além da nossa galáxia era bastante limitado. Embora galáxias distantes fossem observadas como manchas espirais nebulosas não resolvidas, não se sabia que essas nebulosas continham inúmeras estrelas, muito semelhantes às da nossa própria galáxia. Uma descoberta crucial para a compreensão do que essas nebulosas eram foi feita por Edwin Hubble, que identificou estrelas variáveis Cefeidas na galáxia de Andrômeda, provando que essa galáxia estava localizada muito além dos limites da nossa (Hiroshi, 2019).

Mais recentemente, com o avanço dos telescópios e outras técnicas observacionais, a visão do Universo se expandiu progressivamente para distâncias maiores. Uma vez estabelecido que o Universo era povoado por galáxias de tamanhos diferentes, uma questão recorrente passou a ser: em qual escala o Universo segue o princípio cosmológico proposto por Einstein? Só recentemente que pesquisas de galáxias suficientemente profundas e com estatísticas suficientes tornaram-se disponíveis para resolver esta questão definitivamente. Um excelente relato histórico desses primeiros debates e seu papel no desenvolvimento da cosmologia moderna podem ser encontrados em trabalhos do ganhador do prêmio Nobel, Phillip James Edwin Peebles (Peebles, 1980, 1993).

A teoria subjacente ao modelo do Big Bang como a conhecemos hoje foi desenvolvida antes que as questões observacionais mencionadas acima tivessem sido resolvidas. A geometria e evolução temporal do Universo, conforme previsto pela teoria de Einstein,

são dadas pelo que hoje é conhecido como modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e descreve as soluções para as equações de campo de Einstein para um Universo homogêneo e isotrópico cujo fator de escala varia com o tempo (Bucher, 2017).

Até o final da década de 1970, o modelo cosmológico decorrente da RG foi amplamente aceito pela comunidade científica. Mas uma série de observações a partir do final dos anos 90 levou a um interesse renovado em teorias alternativas, buscando encontrar explicações para observações que não foram explicadas pela teoria de Einstein (Debono, 2016).

A RG aplicada ao Universo resultou no modelo Big Bang, que por sua vez é caracterizado como um Universo em expansão a partir de um estado inicial altamente energético e denso. Este modelo conseguiu explicar muitos fenômenos interligados que foram posteriormente confirmados pela observação: a Lei de Hubble e a expansão do Universo, a história térmica do Universo, a nucleossíntese primordial, a relação entre a temperatura e a escala fator e , finalmente, a natureza do corpo negro da Radiação Cósmica de Fundo (RCF). O fato notável é que esses fenômenos ocorrem em escalas extremamente diferentes e são observados através de diferentes processos físicos, e ainda assim todos eles cabem perfeitamente dentro do modelo. No entanto, existem algumas observações que o modelo Big Bang não consegue explicar (Debono, 2016).

Os problemas cosmológicos, como o problema do horizonte, o problema da planura e o problema das correlações no super-horizonte, estão diretamente relacionados ao Universo primordial. Neste trabalho, investigamos um ramo dos modelos inflacionários, que surgem como uma extensão do modelo cosmológico padrão para abordar essas questões. Esses modelos são caracterizados por uma fase de expansão acelerada e exponencial no início do Universo. Uma solução simples e natural para esses problemas é proposta pela conjectura de uma fase de diminuição do raio de Hubble no Universo primordial. Essa redução do raio de Hubble, cada vez menor, é a definição fundamental da inflação, que não só resolve o problema do horizonte, mas também é crucial para o mecanismo inflacionário que gera as flutuações observadas no Universo atual.

Um modelo inflacionário bem-sucedido deve durar tempo suficiente para resolver problemas como os mencionados acima e também fornecer uma transição elegante, conectando o período inflacionário ao universo desacelerado de Friedmann, preservando assim as

previsões bem-sucedidas do Modelo Padrão da Cosmologia (MPC). Atualmente, diversos modelos na literatura sugerem a presença de um ou mais campos escalares responsáveis pelo mecanismo inflacionário (Linde, 1993; Martin; Ringeval; Vennin, 2014; Wands, 2008). No entanto, inicialmente esses campos escalares eram adicionados de maneira *ad hoc*, o que pode não refletir a realidade. Além disso, alguns desses modelos exploram a ideia de campos escalares originados de interações fundamentais e investigam como esses campos interagem em espaços-tempos curvos descritos pela RG (Bezrukov; Shaposhnikov, 2008; Freese; Friemann; Olinto, 1990; Linde, 1983), enquanto outros se baseiam em extensões da RG, ou seja, na incorporação de termos de curvatura (como tensores de Riemann $R_{\mu\lambda\mu\nu}$ ou o de Ricci $R_{\mu\nu}$ ou até mesmo o escalar de curvatura R) de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert (EH) (Cuzinato; Medeiros; Pompeia, 2019; Gottlöber; Müller; Starobinsky, 1991; Ivanov; Tokareva, 2016; Myrzakulov; Odintsov; Sebastiani, 2015; Salvio, 2017; Starobinsky, 1980); esta ação por sua vez, leva à a equação de movimento crucial da RG e suas extensões. Gravidades de ordem superior são motivadas pela física de altas-energias. A RG é uma teoria não renormalizável,¹ isto é, não é possível quantizá-la convencionalmente. Uma via para solucionar esse problema está na inclusão dos termos de curvatura de ordem superior (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022; Stelle, 1977).

Um dos focos deste trabalho é o estudo da correção à teoria de Einstein resultante da adição de um escalar de Ricci quadrático à ação de EH com acoplamento mínimo; modificação esta conhecida como modelo inflacionário de Starobinsky. Este modelo foi proposto no artigo (Starobinsky, 1980) em 1980, por Alexei A. Starobinsky e atualmente é um modelo com grande favorecimento observacional (Ade *et al.*, 2013, 2015, 2021). Ademais, o potencial vinculado ao campo escalar *inflaton* é obtido naturalmente após transformações de *frames* e este é mais um ponto positivo para o modelo.²

¹A renormalização é um procedimento usado em Teoria Quântica de Campos (TQC) para lidar com as divergências infinitas que surgem ao calcular certas interações entre partículas. Em termos simples, ela permite cancelar essas infinitudes, ajustando parâmetros como as massas e as cargas das partículas (Peskin; Schroeder, 2019; Weinberg, 1995; Zee, 2010). A questão da teoria da RG ser não renormalizável está ligada à forma como a teoria lida com as interações gravitacionais em escalas de alta energia (ou seja, quando as distâncias se aproximam do limite de Planck, ou quando as energias são muito altas) (Ashtekar; Singh, 2011; 't Hooft; Veltman, 1974). O modelo de eletrodinâmica quântica (QED), por exemplo, é renormalizável porque as divergências podem ser contidas e os cálculos podem ser feitos de forma consistente (Itzykson; Zuber, 1980; Schwartz, 2013).

²A obtenção natural do potencial inflacionário no modelo de Starobinsky, após a transformação do *frame* de Jordan para o de Einstein, é um ponto positivo porque elimina a necessidade de postular um campo escalar e seu potencial. Isso torna o modelo menos arbitrário e reforça sua consistência com a extensão da RG que inclui o termo R^2 . Além disso, o potencial resultante apresenta um platô, favorecendo

Contudo, o modelo de Starobinsky pode ser aprimorado e neste trabalho mostramos um exemplo de como é possível dar continuidade a esse refinamento quando adicionamos, no Capítulo 5, um termo cúbico do escalar de curvatura R^3 na ação EH e estudamos os parâmetros que compõem a dinâmica escalar.

Para começar, no Capítulo 2, fazemos um resumo dos principais tópicos da Cosmologia Padrão para compreender o *background* necessário para, no Capítulo 3, entendermos como a inflação funciona via dinâmica de campo escalar e também como são descritos os modelos inflacionários. No Capítulo 4, descrevemos a dinâmica do modelo de Starobinsky e no, Capítulo 5, introduzimos a generalização da ação $R + R^2$ com a adição do termo cúbico do escalar de curvatura. Nos dois capítulos que apresentam modelos inflacionários, fazemos conexões com as observações cosmológicas através dos cálculos dos parâmetros de índice espectral n_s e da razão tensorial-escalar r e comparamos os resultados com os dados fornecidos por (Ade *et al.*, 2021). Finalizamos o trabalho com uma conclusão dos resultados gerais obtidos e apresentamos possíveis continuações para este trabalho.

Nos Capítulos 2 e 3 deste trabalho utilizamos a Ref. (Baumann, 2022) como guia principal.

a inflação de *slow-roll* e garantindo concordância com os dados da RCF (Linde, 1990; Martin; Ringeval; Vennin, 2014; Mukhanov; Chibisov, 1981; Nojiri; Odintsov, 2006).

2 COSMOLOGIA PADRÃO

O objetivo deste capítulo é derivar e resolver as equações que governam a evolução do Universo como um todo, levando em consideração suas diferentes componentes: radiação, matéria e a constante cosmológica. A caracterização do Universo apresenta uma distribuição das galáxias irregular em escalas menores, mas, à medida que se observa em escalas maiores, essa distribuição se torna notavelmente uniforme. Especificamente, ao analisarmos distâncias superiores a 100 Mpc, o Universo se mostra isotrópico, ou seja, suas propriedades são as mesmas em todas as direções. Considerando que não existe um ponto privilegiado no espaço, essa isotropia observada implica também em homogeneidade, isto é, todos os pontos no espaço são equivalentes. Essas duas características — homogeneidade e isotropia — constituem o cerne do **Princípio Cosmológico**. Com isso, é possível uma descrição matemática simplificada do Universo, uma vez que a geometria do espaço-tempo assume uma forma consideravelmente simples (Baumann, 2022).

Do ponto de vista teórico, um universo estático, contendo matéria e energia, é instável por natureza. Por essa razão, espera-se que o espaço-tempo seja dinâmico (Baumann, 2022). De fato, observações da luz de supernovas tipo Ia³ revelaram que o Universo está em expansão acelerada (Perlmutter *et al.*, 1998; Riess *et al.*, 1998). Ao retrocedermos essa expansão no tempo, estima-se que, há cerca de 14 bilhões de anos, o Universo estava em um estado extremamente denso e quente. A teoria do Big Bang, associada ao MPC, descreve como esse estado inicial evoluiu, originando o Universo que observamos hoje (Baumann, 2022).

Em um universo em expansão, o elemento de linha⁴ quadri-dimensional pode ser escrito como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\ell^2, \quad (2.1)$$

³As supernovas tipo Ia ocorrem em sistemas binários, onde uma das estrelas é uma anã branca (o remanescente de uma estrela que esgotou seu combustível nuclear). A supernova acontece quando a anã branca acumula matéria de uma estrela companheira até atingir uma massa crítica (aproximadamente 1,4 vezes a massa do Sol), chamada de limite de Chandrasekhar. Esse limite é a massa máxima que uma anã branca pode ter sem colapsar sob sua própria gravidade. Quando a anã branca atinge esse limite, a pressão e a temperatura no núcleo se tornam altas o suficiente para iniciar uma fusão de carbono e oxigênio, o que resulta em uma explosão catastrófica. Essa classe de supernovas são usadas como "velas padrão" para medir distâncias astronômicas (Carroll; Ostlie, 2017).

⁴Conferir Apêndice A.

onde $d\ell^2 \equiv \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j$,⁵ representa o elemento de linha nas fatias espaciais em \sum_t e $a(t)$ é o **fator de escala**, que descreve a expansão do Universo. Inicialmente, determinaremos as formas permitidas para a métrica espacial γ_{ij} e, em seguida, abordaremos como a evolução do fator de escala se relaciona com o conteúdo de matéria que compõe o Universo (Baumann, 2022). Para simplificar, consideraremos a velocidade da luz como uma constante, adotando $c \equiv 1$ durante todo o trabalho.

O objetivo deste capítulo é derivar e resolver as equações que governam a evolução do Universo como um todo, levando em consideração suas diferentes componentes: radiação, matéria e a constante cosmológica (Baumann, 2022).

2.1 Espaços tridimensionais simétricos

Os espaços tridimensionais homogêneos e isotrópicos devem ter curvatura intrínseca constante. Existem então apenas três possibilidades: a curvatura das fatias espaciais pode ser zero, positiva ou negativa. Então, determinamos a métrica para cada caso:

- **Espaço plano:** a possibilidade mais simplista é o espaço plano ($k = 0$) Euclidiano tridimensional E^3 . Nesta circunstância, linhas paralelas jamais se encontram e o elemento de linha⁶ é

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

que é claramente um invariante sob translações espaciais $x^i \mapsto x^i + a^i$, com a^i constante sob rotações $x^i \mapsto R^i_k x^k$, com $\delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl}$, sendo R^i_j a matriz 3×3 de rotações (Baumann, 2022). Comentamos que

$$\mathbf{x}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

- **Espaço esférico:** Outra possibilidade para um espaço tridimensional ($3D$) é aquele com curvatura positiva ($k = +1$). Nesse caso, linhas paralelas eventualmente se encontram. Essa geometria pode ser representada como uma esfera tridimensional

⁵Os índices latinos iniciam a contagem em 1 e correspondem à índices espaciais.

⁶O Apêndice A, apresenta um breve resumo de RG cobrindo os assuntos necessários para entender o significado de elemento de linha e tensor métrico (ou simplesmente métrica).

S^3 imersa em um espaço euclidiano de quatro dimensões E^4 (Baumann, 2022):

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 + du^2, \quad \mathbf{x}^2 + u^2 = R_0^2,$$

onde R_0 é o raio da esfera, e u atua como uma coordenada extra.

- **Espaço hiperbólico:** Finalmente, também é possível um Universo com curvatura negativa ($k = -1$). Nesse caso, as linhas paralelas divergem. Essa geometria é representada por um hiperboloide tridimensional H^3 embebido em um espaço quadri-dimensional de assinatura Lorentziana $\mathbb{R}^{1,3}$ (Baumann, 2022):

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 - du^2, \quad \mathbf{x}^2 - u^2 = -R_0^2,$$

onde $R_0^2 > 0$ é uma constante que determina a curvatura do hiperboloide. Neste caso, a homogeneidade e isotropia na superfície da hipérbole, imersa no universo considerado, decorrem da simetria do elemento de linha sob pseudo-rotações quadridimensionais (Baumann, 2022).

Os elementos de linha esféricos e hiperbólicos podem ser combinados como

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 \pm du^2, \quad \mathbf{x}^2 \pm u^2 = \pm R_0^2.$$

Podemos estimar os diferenciais infinitesimais ao calcular

$$d(\mathbf{x}^2) \pm d(u^2) = d(\pm R_0^2) \implies 2\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \pm 2udu = 0,$$

de onde obtemos

$$2udu = \mp 2\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \implies udu = \mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}.$$

Eliminamos a dependência da coordenada auxiliar u no elemento de linha ao calcular du^2 :

$$(udu)^2 = (\mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2 \implies du^2 = \frac{(\mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{u^2}.$$

Como sabemos que $u^2 = \pm R_0^2 \mp \mathbf{x}^2$, obtemos

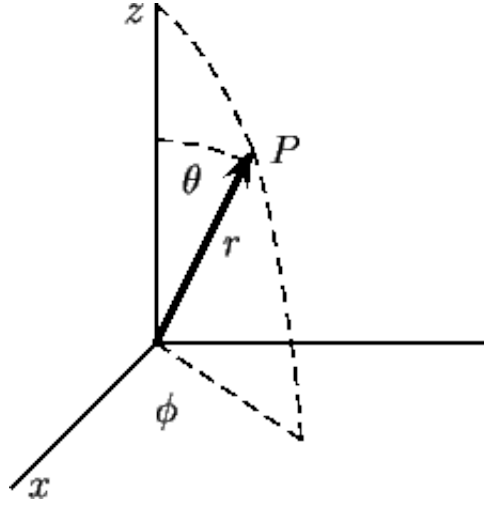
$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{R_0^2 \mp \mathbf{x}^2}. \quad (2.2)$$

Dessa forma, unificamos o resultado da Eq. (2.2) com o caso plano ao escrever

$$d\ell^2 = d\mathbf{x}^2 + k \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{R_0^2 - k\mathbf{x}^2}, \quad \text{para } k \equiv \begin{cases} 0 & , E^3, \\ +1 & , S^3, \\ -1 & , H^3. \end{cases} \quad (2.3)$$

As simetrias do espaço tornam-se mais evidentes quando escrevemos a métrica em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , conforme ilustrado na Fig. 1.

Figura 1 – Sistema de coordenadas esféricas



Fonte: Fleming (2003).

Dado os resultados obtidos no Apêndice A, temos:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^2 &= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= r dr, \\ \mathbf{x}^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Substituindo esses resultados na Eq. (2.3), obtemos

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + k \frac{r^2 dr^2}{R_0^2 - kr^2},$$

onde definimos $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ para a métrica FLRW em coordenadas esféricas.

Assim,

$$d\ell^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}} + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4)$$

Observe que, apesar de $r = 0$ parecer um ponto especial na Eq. (2.4), não há um centro no Universo. Cada ponto no espaço é equivalente a qualquer outro.

2.2 Métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Nesta seção, especificaremos a métrica que caracteriza o Universo em expansão, assumindo que este obedece o PC. Assim, com os resultados obtidos na Seção 2.1, substituímos a Eq. (2.4) na Eq. (2.1) e obtemos a **métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker** em coordenadas esféricas, a qual será fundamental para cálculos futuros:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \frac{kr^2}{R_0^2}} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.5)$$

essa expressão também é conhecida como métrica **FLRW**.

Algumas características importantes desse resultado merecem destaque:

- Primeiramente, o elemento de linha expresso na Eq. (2.5) possui uma simetria de redimensionamento, ou seja,

$$a \rightarrow \lambda a, \quad r \rightarrow r/\lambda, \quad R_0 \rightarrow R_0/\lambda.$$

A geometria do espaço-tempo permanece inalterada, independentemente da reescala simultânea de a , r e R_0 por uma constante λ . Essa liberdade permite fixar o fator de escala no presente — ou seja, quando $t = t_0$ — como uma unidade, $a(t_0) = a_0 \equiv 1$. Dessa forma, R_0 passa a representar a escala de curvatura física no presente, o que justifica o uso do índice 0 (Baumann, 2022).

- A coordenada r é denominada **coordenada comóvel**. Essa distância pode ser alterada por uma reescala conforme indicado na Eq. (2.5) e, portanto, não constitui um observável físico (Baumann, 2022). Por outro lado, resultados físicos dependem apenas das **coordenadas físicas**, definidas como $r_{\text{fis}} = a(t)r$.

Ao estudar a dinâmica das galáxias, introduzimos o parâmetro de Hubble, que será descrito a seguir. A caracterização desse parâmetro é feita considerando uma galáxia cuja trajetória em coordenadas comóveis é $\mathbf{r}(t)$, enquanto em coordenadas físicas é $\mathbf{r}_{\text{fis}} = a(t)\mathbf{r}$

(Baumann, 2022). Assim, a velocidade física da galáxia é dada por:

$$\mathbf{v}_{\text{fis}} \equiv \frac{d\mathbf{r}_{\text{fis}}}{dt} = \frac{da(t)}{dt}\mathbf{r} + a(t)\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2.6)$$

pela regra do produto. Na Eq. (2.6) definimos a velocidade peculiar $\mathbf{v}_{\text{pec}} \equiv a(t)\dot{\mathbf{r}}$, onde $\dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dt$, que descreve a velocidade medida por um “observador em movimento” e também mede o movimento da galáxia em relação ao referencial de repouso cosmológico, normalmente gerado graças à gravidade de outras galáxias próximas.

Por fim, reorganizamos (2.6) fazendo

$$\mathbf{v}_{\text{fis}} \equiv \frac{da(t)}{dt}\mathbf{r} \frac{a(t)}{a(t)} + \mathbf{v}_{\text{pec}} = H\mathbf{r}_{\text{fis}} + \mathbf{v}_{\text{pec}}, \quad (2.7)$$

onde introduzimos o **parâmetro de Hubble**

$$\boxed{H \equiv \frac{\dot{a}}{a}}, \quad (2.8)$$

sendo $\dot{a} \equiv da/dt$. Esse parâmetro, junto à \mathbf{r}_{fis} , define a velocidade com que a galáxia se afasta devido à expansão do espaço-tempo entre a origem e a coordenada.

2.3 Equação de Continuidade FLRW

A equação de continuidade na cosmologia é uma das equações fundamentais derivadas das leis de conservação aplicadas ao tensor energia-momento no contexto de um Universo em expansão descrito pela métrica FLRW. No Apêndice A, vimos a conservação da energia ao estudar derivações de tensores.

Para trabalhar com a Eq. (A.2), é importante lembrar que cada índice (contravariante e covariante) contribui com um termo associado ao símbolo de Christoffel, cuja definição foi abordada no Apêndice A. Dito isto,

$$\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = \partial_{\mu}T^{\mu}_{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}T^{\lambda}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}T^{\mu}_{\lambda} = 0.$$

Isso corresponde a quatro equações separadas (uma para cada valor de ν).⁷ A evolução

⁷Ou seja, índices gregos iniciam a contagem em 0 e este índice corresponde ao tempo.

daí a densidade de energia é obtida quando aplicamos $\nu = 0$ na equação acima, assim

$$\partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0,$$

daí expandimos os dois primeiros termos, para que possamos usufruir dos zeros que a isotropia proporciona. Então

$$\partial_0 T^0_0 + \partial_i T^i_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0_0 + \Gamma^\mu_{\mu i} T^i_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0$$

sabendo que $T^i_0 = 0$, temos

$$\partial_0 T^0_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0.$$

Conhecendo o tensor energia-momento misto

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

notamos que T^0_0 é a componente de densidade de energia ρ , que por sua vez depende apenas do tempo. Na Eq. (2.9) P é a pressão, por isso reescrevemos a equação acima substituindo as componentes do tensor:

$$\frac{d}{dt}(-\rho) + \Gamma^\mu_{\mu 0}(-\rho) - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0. \quad (2.10)$$

Como

$$\Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = 0\Gamma^0_{\mu 0} T^\mu_0 + \Gamma^i_{\mu 0} T^\mu_i = 0\Gamma^i_{00} T^0_i + \Gamma^i_{j0} T^j_i$$

e

$$\Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j,$$

então:

$$\Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = \Gamma^i_{j 0} T^j_i = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j T^j_i = \frac{\dot{a}}{a} T^i_i = 3 \frac{\dot{a}}{a} P,$$

pois sabemos que $T^i_i = T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 = 3P$. O segundo termo de (2.10) será:

$$\Gamma^\mu_{\mu 0} = 0\Gamma^0_{00} + \Gamma^i_{i0} = 3 \frac{\dot{a}}{a}.$$

Substituindo na Eq. (2.10):

$$\frac{d(-\rho)}{dt} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} P = 0$$

portanto

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + P) = 0. \quad (2.11)$$

Essa equação fundamental descreve a conservação da energia total no contexto cosmológico e é denominada equação de continuidade. Note que a notação usual da conservação de energia no espaço plano — derivada do teorema de Noether⁸ — depende da invariância sob translações temporais.

No entanto, essa simetria é quebrada em um Universo em expansão, tornando a noção convencional de conservação de energia inadequada. Em vez disso, a equação de continuidade (2.11) emerge como a formulação correta para descrever a evolução da densidade de energia no contexto cosmológico.

A maioria dos fluidos cosmológicos pode ser parametrizada em termos de uma **equação de estado**:

$$w \equiv \frac{P}{\rho}. \quad (2.12)$$

Com essa definição, podemos estudar a equação de continuidade para cada componente

⁸O teorema de Noether afirma que, para todo sistema lagrangeano, a existência de uma simetria contínua implica a conservação de uma quantidade associada, expressa por uma equação de continuidade (Fleming, 2002).

isoladamente.⁹ Neste caso, manipulamos a Eq. (2.11):

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1+w).$$

Podemos integrar essa equação para obter a relação entre a densidade de energia e o fator de escala a :

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = -3(1+w)\ln\left(\frac{a}{a_0}\right).$$

Lembramos que foi assumido o fator de escala atualmente valendo $a_0 = 1$, então notamos, finalmente

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)} \rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}, \quad (2.13)$$

o que mostra como a diluição da densidade de energia vincula-se diretamente a equação de estado.

2.4 Curvatura do Espaço-Tempo

Nesta subseção, analisamos como a métrica FLRW, aplicada aos termos de curvatura, dá origem à dinâmica do espaço-tempo. Para isso, precisamos calcular o tensor de Einstein (derivado no Apêndice A):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu},$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e $R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o seu traço, conhecido como escalar de Ricci. O tensor de Ricci está diretamente relacionado ao símbolo de Christoffel $\Gamma^\mu{}_{\kappa\nu}$, que pode ser calculado especificamente para a métrica FLRW. Contudo, não é necessário calcular os componentes $R_{i0} = R_{0i}$, pois a isotropia da métrica cancela tais termos. Dessa forma, os únicos componentes relevantes do tensor de Ricci são R_{00} e R_{ij} .

⁹Quando consideramos a interação entre as componentes de matéria, radiação e constante cosmológica, a equação de continuidade assume um formato diferente. É comum escrever as equações em pares. Assumindo a relação entre radiação e matéria, temos $\rho = \rho_r + \rho_m$ e $P = P_r + P_m$. O mesmo ocorre com a equação de estado, $w_i = \frac{P_i}{\rho_i}$. Assim, $\dot{\rho}_r + 3H\rho_r[1+w_r] + \dot{\rho}_m + 3H\rho_m[1+w_m] = 0$. Se definirmos $Q = \dot{\rho}_r + 3H\rho_r(1+w_r)$ e $-Q = \dot{\rho}_m + 3H\rho_m(1+w_m)$, vemos que há um balanço entre as interações das componentes: a energia que sai de uma componente é transferida para outra. O mesmo ocorre ao incluir a constante Λ , porém com um termo adicional na equação.

Utilizando a métrica (2.5) e a definição do símbolo de Christoffel (A.6), escrevemos (as soluções a seguir foram obtidas no Apêndice B):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{\dot{a}}{1 - \kappa r^2} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2} \\
\Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} & \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - \kappa r^2) \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $\kappa = \frac{k}{R_0^2}$. Por sua vez, esses símbolos serão relacionados com os componentes do tensor de Ricci (obtidos também no Apêndice B):

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2}, \\
R_{22} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa), \\
R_{33} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Munidos dos resultados acima, escrevemos o escalar de Ricci sendo¹⁰

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right]. \tag{2.16}$$

Ainda com a Eq. (2.15) é possível generalizar o resultando quando fazemos

$$R_{ij} = \left[2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\kappa}{a^2} \right] g_{ij}, \tag{2.17}$$

onde g_{ij} é a métrica dada na Eq. (2.5). As componentes diferente de zero do tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$, para a métrica FRLW serão:

$$G^0_0 = -3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right] \tag{2.18}$$

¹⁰Para chegar na Eq. (2.16) foi necessário saber que $R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$.

e

$$G^i_j = - \left[2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right] \delta^i_j. \quad (2.19)$$

Com esse resultado temos as componentes básicas necessárias para determinar as equações que regem a evolução do Universo de uma maneira geral.

2.5 Equações de Friedmann

Finalmente, a partir da Equação de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$,¹¹ podemos deduzir a **equação de Friedmann**, a qual conecta a geometria do espaço-tempo (métrica FLRW) com o conteúdo energético do Universo. Utilizaremos a parte temporal do tensor de Einstein para isso. Assim, sabendo $G^0_0 = 8\pi GT^0_0$, com a Eq. (2.9) temos $T^0_0 = -\rho$. Daí, com a Eq. (2.18), escrevemos

$$-3 \left[\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right] = -\rho 8\pi G.$$

Ou seja, com a parte temporal da equação de Einstein chegaremos na conexão com a cosmologia. Manipulamos algébricamente e obtemos a equação de Friedmann

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{\kappa}{a^2}}, \quad (2.20)$$

onde ρ é a soma de todas as contribuições das densidades de energia do Universo.

Escreveremos ρ_r para a contribuição de radiação (com ρ_γ para fótons e ρ_ν para neutrinos), ρ_m será a contribuição da matéria (com ρ_c para a matéria escura fria e ρ_b para os bárions) e ρ_Λ a contribuição da energia do vácuo. A equação acima é fundamental para descrever a evolução do fator de escala. Para escrever uma equação fechada de $a(t)$, precisamos especificar a evolução da densidade $\rho(a)$, como na Eq. (2.13).

Ademais, a parte espacial da equação de Einstein resultará na segunda equação de Friedmann (também conhecida como **equação de Raychaudhuri**). Escrevemos

$$G^i_j = 8\pi GT^i_j,$$

¹¹Conferir Apêndice A.

mas lembramos $T^\mu{}_\nu = (-\rho, P, P, P)$ implicando em

$$-\left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2}\right]\delta^i_j = 8\pi G P \delta^i_j.$$

Podemos substituir a Eq. (2.20) no resultado acima:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)}. \quad (2.21)$$

Quando efetuamos a derivada temporal em (2.20) e utilizamos a Eq. (2.11) para $\dot{\rho}$ o mesmo resultado é obtido. Para mais, é possível escrever a primeira equação de Friedmann em termos do parâmetro de Hubble, onde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (2.22)$$

Em um universo plano, $\kappa = 0$, a **densidade crítica** ρ_{crit} hoje é

$$\begin{aligned} \rho_{\text{crit},0} &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3} \\ &= 2.8 \times 10^{11} h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3} \\ &= 1.1 \times 10^{-5} h^2 \text{protons cm}^{-3}. \end{aligned}$$

O subscrito 0 em $\rho_{\text{crit},0}$ indica que essa é a densidade crítica atual, isto é, avaliada em $t = t_0$.

Todas as densidades podem ser expressas em relação à densidade crítica, o que permite definir os **parâmetros de densidade**

$$\Omega_{i,0} \equiv \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{\text{crit},0}}, \quad i = \text{r, m, } \Lambda, \dots \quad (2.23)$$

Na literatura, o subscrito 0 no parâmetro de densidade $\Omega_{i,0}$ é descartado. Então, de agora em diante a convenção será Ω_i para a densidade crítica hoje. Dito isso, escrevemos a equação de Friedmann como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho - \frac{\kappa}{a^2 H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\Omega_\kappa}{a^2}$$

onde $\rho = \sum_i \rho_i$ é a contribuição de todas as densidades e $\Omega_\kappa \equiv -\frac{\kappa}{H_0^2}$ é o parâmetro de densidade da curvatura. Assumindo um universo que contenha três componentes de energia, temos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_r}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\rho_m}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\Omega_\kappa}{a^2}.$$

Com a equação de continuidade, foi demonstrado que há uma proporcionalidade entre a densidade e o fator de escala via Eq. (2.11), vinculado à equação de estado referente à cada componente. Então, sabendo que $w = -1, 0, 1/3$,¹² para constante cosmológica, matéria e radiação, respectivamente, teremos

$$\rho_\Lambda \propto a^0, \rho_m \propto a^{-3}, \rho_r \propto a^{-4}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \frac{\rho_{r,0}a^{-4}}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\rho_{m,0}a^{-3}}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\rho_{\Lambda,0}a^0}{\rho_{\text{crit},0}} + \frac{\Omega_\kappa}{a^2} \\ &= \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa a^{-2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Perceba que $\Omega_\kappa < 0$ para $\kappa > 0$. Impondo o tempo atual, vemos

$$\frac{H_0^2}{H_0^2} = \Omega_r a_0^{-4} + \Omega_m a_0^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa a_0^{-2},$$

porém, é comum adotar a normalização do fator de escala hoje sendo $a(t_0) = a_0 \equiv 1$, ou seja

$$1 = \underbrace{\Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda}_{\equiv \Omega_0} + \Omega_\kappa,$$

Logo,

$$1 = \Omega_0 + \Omega_\kappa.$$

Ademais, é possível obter o parâmetro de densidade da curvatura somente em relação aos observáveis físicos, isto é,

$$\Omega_\kappa = -\frac{\kappa}{H_0^2} = 1 - \Omega_0.$$

¹²A constante cosmológica apresenta pressão negativa e a mesma proporção entre densidade de energia e pressão, resultando em $w = -1$. Enquanto que, para matéria, esta componente não apresenta pressão e por isso resulta em $w = 0$. Finalmente, com a mecânica estatística, sabemos que todo fluido com $v \approx c$, como os fótons, apresenta a proporção entre pressão e densidade como $w = 1/3$.

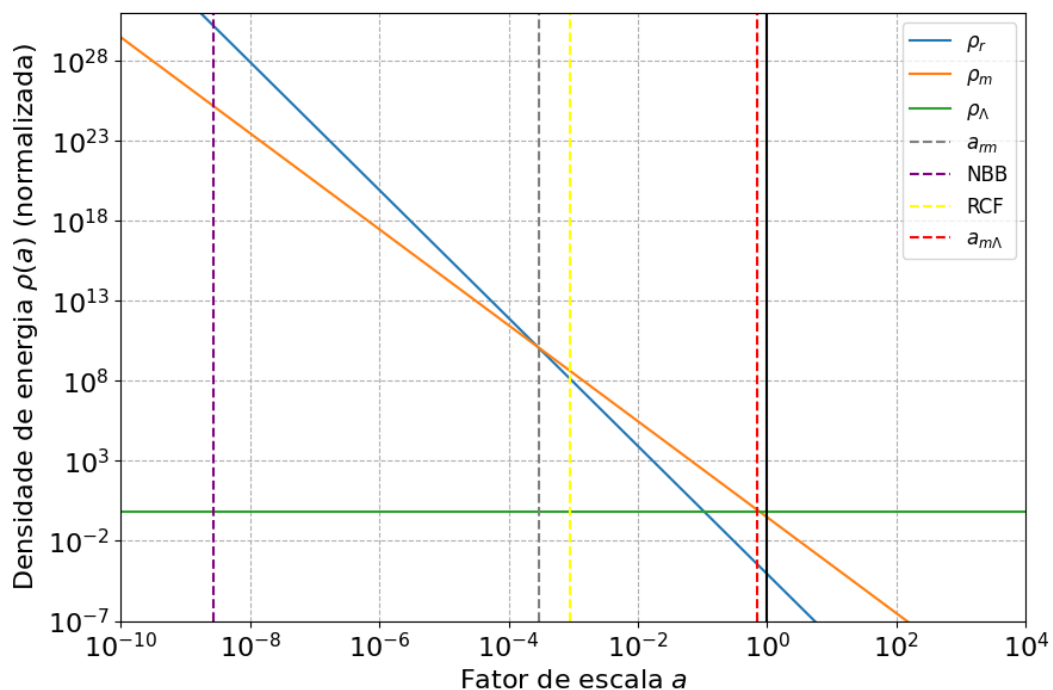
Uma tarefa central na cosmologia é medir os parâmetros que aparecem na equação de Friedmann e por fim, conseguir determinar a composição do Universo.

2.6 Soluções Exatas

Em geral, devido à sua complexidade, a equação de Friedmann (2.24), quando expressa em termos dos parâmetros de densidade, dificulta a obtenção de soluções explícitas para o fator $a(t)$. Nesta subseção, analisaremos casos especiais que fornecem possíveis soluções. Como veremos, muitas dessas soluções são boas aproximações para determinados períodos da evolução do nosso Universo (Baumann, 2022).

Considere um universo plano ($\kappa = 0$) contendo apenas um componente. Como as diferentes densidades de energia evoluem de maneira distinta — matéria (a^{-3}), radiação (a^{-4}) e energia do vácuo (a^0) —, isso implica que, ao longo da história do Universo, houve eras dominadas sucessivamente por cada um desses componentes: primeiro radiação, depois matéria e, por fim, energia do vácuo (veja Fig. 2) (Baumann, 2022).

Figura 2 – Evolução das densidades de energia no Universo. Vemos que existem períodos onde um componente domina: primeiro a radiação, depois a matéria e, finalmente, a energia escura. Há dois períodos de equipartição: a_{rm} , da transição entre radiação e matéria e $a_{m\Lambda}$, da transição de matéria e constante cosmológica (Baumann, 2022).



Fonte: Autora

Para solucionar a equação de Friedmann, parametrizamos esses componentes pela equação de estado w_i e posteriormente descobrimos o comportamento do fator de escala para cada era. Assim, dada a equação que considera a constante Λ , temos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.25)$$

e estudaremos matéria e radiação com condições iniciais diferentes da constante cosmológica.

Iniciamos estudando matéria ou radiação, assumindo $\kappa = 0$ e $\Lambda = 0$. Pela equação de continuidade, sabemos $\rho_i = \rho_0 a^{-3(1+w_i)}$, onde $w_i = P/\rho_i$ é a equação de estado para $i = m$ ou $i = r$. Desta forma,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho = H_0^2 \frac{\rho_i}{\rho_{\text{crit},0}} = H_0^2 \frac{\rho_{i,0} a^{-3(1+w_i)}}{\rho_{\text{crit},0}},$$

daí

$$H^2 = H_0^2 \Omega_i a^{-3(1+w_i)}.$$

Reescrevemos executando a raiz quadrada de ambos os lados da igualdade,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \sqrt{H_0^2 \Omega_i a^{-3(1+w_i)}} = H_0 \sqrt{\Omega_i} a^{-\frac{3}{2}(1+w_i)}.$$

Aplicamos a condição de Big Bang na equação acima e obtemos os seguintes resultados (conforme Apêndice B)

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w_i)}}. \quad (2.26)$$

Especificando w para a era da radiação (ER) $w = 1/3$ e para era da matéria (EM) $w = 0$, temos

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{1/2} & \text{ER,} \\ t^{2/3} & \text{EM.} \end{cases}$$

Determinamos $a(t)$ na era dominada pela constante cosmológica (Λ) ao escolher entre as condições $\rho = \kappa = 0$, $\Lambda \neq 0$ ou $\rho = \rho_\Lambda = \text{cte}$, $\kappa = \Lambda = 0$ para inserção na Eq. (2.25). Optamos pela segunda opção. Consequentemente, a equação correspondente

à constante cosmológica será (vide Apêndice B):

$$a(t) = e^{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t}.$$

Podemos encontrar uma relação entre a constante de Hubble e a idade do Universo fazendo

$$\dot{a} = \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \right] = \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t_0} \right) = \frac{2}{3} a(t) t^{-1},$$

para posteriormente manipular algebricamente e obter

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t},$$

ou

$$H = \frac{2}{3t}.$$

Em $t = t_0$, temos

$$H_0 = \frac{2}{3t_0}.$$

Com o valor observado da constante de Hubble $H_0 \approx 70 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ calculamos a seguinte idade para o Universo:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{70 \text{km}} (3,086 \times 10^{19} \text{km}) \text{s} \approx 2,94 \times 10^{17} (3,157 \times 10^{-7}) \text{anos} \approx 9 \times 10^9 \text{anos}.$$

Esse é o famoso problema de idade: a idade para um Universo puramente repleto de matéria é menor do que a idade das estrelas mais velhas já observadas (Baumann, 2022).

Os resultados acima também são válidos para um Universo desprovido de matéria, contendo apenas o termo de curvatura. A dependência da curvatura com a escala a^{-2} sugere a definição de $w_\kappa = -1/3$. Na ausência de outras contribuições de fluidos, a equação de Friedmann permite solução apenas para $\kappa = -1$, pois valores diferentes resultariam em uma função de Hubble imaginária, o que não é fisicamente admissível. Neste caso, aplicamos $w = -1/3$ na Eq. (2.26):

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1-1/3)}} = \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

e este é o chamado de **Universo Milne**.

A solução para a constante cosmológica, $w_\Lambda = -1$, é conhecida como **espaço de Sitter**. Esta é uma boa aproximação para a evolução do Universo em um passado muito distante e no futuro longínquo (Baumann, 2022).

Este capítulo teve como objetivo apresentar, de forma breve, o *background* da cosmologia moderna. O MPC possui bases sólidas, mas também apresenta algumas limitações. No próximo capítulo, exploraremos essas limitações e discutiremos uma possível solução.

3 INFLAÇÃO CÓSMICA

As características fundamentais do universo que observamos exigem que o mesmo tenha condições iniciais peculiares e muito bem ajustadas para que a homogeneidade e isotropia aconteçam em largas escalas e a planura domine as fatias espaciais. Estas condições são impostas manualmente pelos cosmólogos na construção do MCP, a fim de obter os resultados que as observações sugerem. A evolução temporal do sistema é descrito pelas lei de gravidade e dinâmica dos fluidos (Baumann, 2022). Neste capítulo, mostramos como a inflação - um período inicial de expansão acelerada exponencialmente - impulsiona a evolução do Universo à direção que conhecemos.

A suavidade do Universo primordial pode ser compreendida ao considerarmos uma distribuição de matéria homogênea e isotrópica. Ao retrocedermos na linha do tempo do Universo, chegamos a um ponto onde não é possível observar além da RCF. Nesse estágio, grande parte do Universo aparenta não ter tido contato causal, pois a luz não conseguiu percorrer a distância entre os eventos dentro do intervalo de tempo permitido pela velocidade da luz. *A priori*, não há motivação dinâmica que explique por que regiões causalmente desconectadas contenham propriedades físicas semelhantes, por exemplo, o equilíbrio térmico. Este problema de homogeneidade é chamado de **problema de horizonte** (Baumann, 2022).

Rigorosamente, é necessário caracterizar as velocidades em cada ponto do espaço e incluí-las nas condições iniciais de forma detalhada, uma vez que, para o Universo permanecer homogêneo em tempos posteriores, tais velocidades iniciais precisam de valores deveras precisos. Caso haja alguma irregularidade nas velocidades, existem duas possibilidades de evolução: para menos, o Universo entra em colapso em uma fração de segundo; ou para mais, o Universo se expande rapidamente, tornando-se quase vazio. Ou seja, é necessário um ajuste preciso nas velocidades para evitar cenários extremos. Além disso, outra questão importante no contexto do MCP é que essas velocidades precisam ser ajustadas em regiões do espaço que estão casualmente desconectadas. Esses pontos trazem à tona o **problema da planura**, que está relacionado à curvatura espacial do Universo. A curvatura local de uma região é determinada pela soma das energias potenciais e cinéticas específicas dessa área. Esse problema busca explicar por que a curvatura espacial observada é tão próxima de zero (Baumann, 2022).

Vale destacar que, além dos problemas mencionados, o Universo em escalas pequenas não é homogêneo, apresentando flutuações na distribuição de matéria que não são aleatórias e exibem correlações em grandes distâncias. Um exemplo disso são as correlações de temperatura observadas na RCF. Como essas correlações poderiam ser explicadas em **escalas do super-horizonte**¹³ (Baumann, 2022)?

Neste capítulo, será abordada a teoria fundamental da inflação cósmica. Uma das características notáveis da inflação é o seu mecanismo intrínseco para gerar as flutuações primordiais de densidade. Flutuações quânticas são amplificadas pela rápida expansão inflacionária, tornando-se as sementes para a formação da grande estrutura do Universo.

O problema de causalidade discutido anteriormente sugere a existência de uma fase primordial, anterior ao chamado período de reaquecimento, na qual a homogeneidade do Universo e suas flutuações correlacionadas se formaram. A seguir, serão analisadas as condições necessárias para que esse período inicial resolva as questões associadas ao modelo convencional do Big Bang na cosmologia.

3.1 Esfera de Hubble Contraindo

A distância máxima que a luz pode percorrer devido à sua velocidade limitada está diretamente relacionada à região do espaço que é causalmente conectada. Analisamos como essa região pode ser descrita matematicamente em coordenadas comóveis, que por sua vez são funções do tempo conforme, definido por $d\eta \equiv dt/a$. Nesse regime, as geodésicas nulas podem ser aproximadas como linhas retas, o que permite estabelecer uma relação entre a diferença no tempo conforme e a diferença nas distâncias entre dois pontos.

Estudamos as condições iniciais necessárias para os ajustes previamente discutidos ao avaliarmos o modelo do Big Bang, com início na singularidade,¹⁴ onde $t_i \equiv 0$. Um observador no tempo t , situado a uma distância temporal, $\Delta t = t - t_i$, do momento da singularidade, pode caracterizar o horizonte de partículas¹⁵ (comóvel) $d_h(\eta)$. Nessa

¹³O super-horizonte caracteriza a região que ultrapassou o horizonte causal.

¹⁴A singularidade do Big Bang é um momento no tempo, não um ponto no espaço. Na verdade, nas Fig. 3 e 4 há a representação da singularidade por uma hipersuperfície espacial estendida (Baumann, 2022).

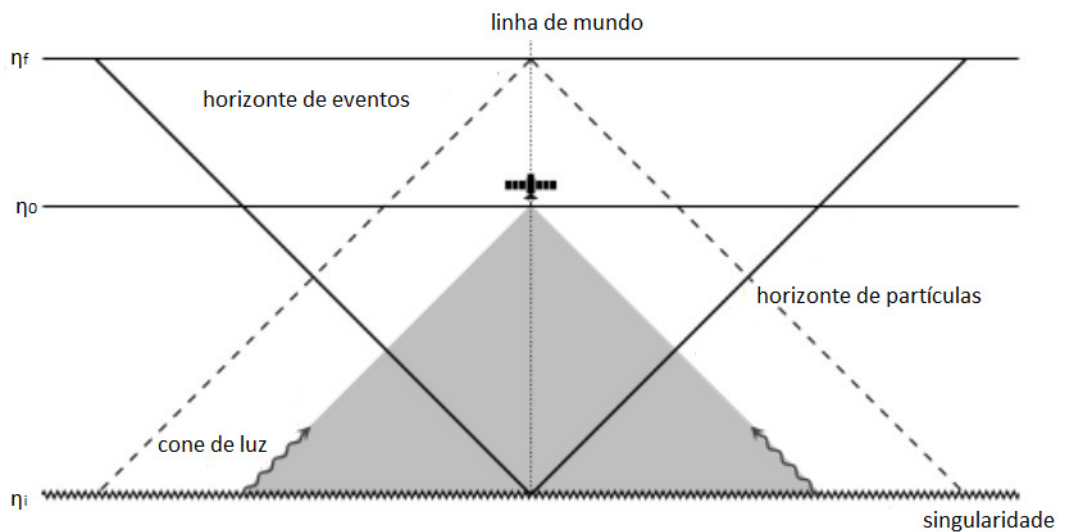
¹⁵O conceito de horizonte de partículas refere-se à maior distância que um observador pode alcançar

distância temporal,¹⁶ os fótons viajaram à velocidade c e carregam consigo informações dos primeiros momentos do universo (Baumann, 2022). Matematicamente, temos:

$$d_h(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.1)$$

No Big Bang, assumimos que $\eta_i \equiv 0$, e o horizonte de partículas comóveis pode ser reduzido ao tempo conforme. O tamanho do horizonte no tempo η pode ser visualizado pela interseção do cone de luz¹⁷ no passado de um observador \mathcal{O} com a superfície *spacelike* em η_i (Baumann, 2022). As influências causais devem vir de dentro dessa região, como ilustrado na Fig. 4.

Figura 3 – Nesta figura temos a ilustração de um diagrama de espaço-tempo que descreve os conceitos de horizontes cosmológicos. O horizonte de partículas define a distância máxima de onde um observador pode receber sinais tais quais devem estar contidos no cone de luz do passado do observador. Por outro lado, o horizonte de eventos é a distância máxima que o observador pode alcançar enviando sinais no futuro (Baumann, 2022).



Fonte: Adaptado de Baumann (2022).

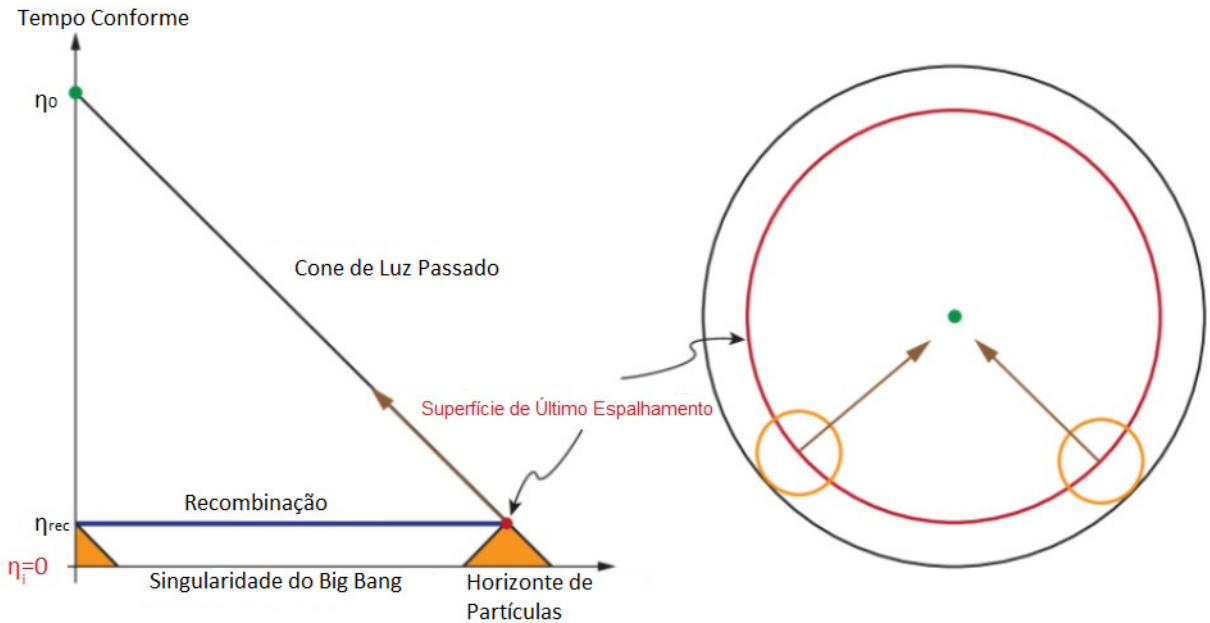
com sinais (fótons, por exemplo) que viajaram à velocidade da luz desde um evento no passado.

¹⁶A distância com que esses fótons viajaram (o horizonte de partículas) não é diretamente uma "distância temporal", mas sim uma distância física comóvel, que depende do tempo e da expansão do universo.

¹⁷Os fótons percorrem *world lines* (linhas de mundo) com tempo próprio zero, $ds^2 = 0$, e isto caracteriza geodésicas nulas. Partículas massivas viajam ao longo das linhas do mundo com tempo real próprio, $ds^2 > 0$, chamadas geodésicas *timelike*. Regiões causalmente desconectadas no espaço-tempo são separadas por intervalos *spacelike*, $ds^2 < 0$. O conjunto de todas as geodésicas nulas que passam por um determinado ponto (ou evento) no espaço-tempo é chamado de cone de luz. O interior do cone de luz define a região do espaço-tempo causalmente relacionada a esse evento (Baumann, 2012).

Os sinais vindos de fora desta região teriam que viajar mais rápido que a velocidade da luz para chegar a \mathcal{O} . Ademais, podemos também analisar o comportamento da teoria do Big Bang padrão na Fig. 4 (Baumann, 2022). Em $\eta_i = 0$, a singularidade é fixada, e na recombinação¹⁸ ocorreria uma superfície de último espalhamento, onde regiões causais se formariam de maneira circular, sem apresentar interseção. Esse fenômeno caracterizaria o problema do horizonte na cosmologia.

Figura 4 – Diagramas conforme a cosmologia do Big Bang para a descrição do problema do horizonte. Na ilustração à esquerda, vemos duas regiões laranjas separadas em η_{rec} , ou seja, no tempo da recombinação. Elas são observadas em equilíbrio térmico hoje, isto é, em η_0 . Na imagem à direita, vemos a superfície da última dispersão (recombinação), que consiste em 10^5 regiões causalmente desconectadas.



Fonte: Adaptado de Baumann (2012).

A Eq. (3.1) pode ser escrita da seguinte forma esclarecedora:

$$d_h(\eta) = \int_{t_i}^t \frac{dt}{a(t)} = \int_{\ln a_i}^{\ln a} (aH)^{-1} d \ln a \quad (3.2)$$

onde $a_i \equiv 0$ corresponde à singularidade do Big Bang.

A estrutura causal do espaço-tempo está, portanto, relacionado à evolução do **raio comóvel de Hubble**, $(aH)^{-1}$. Quando estamos tratando de fontes de matéria comum, o raio comóvel de Hubble é uma função crescente do tempo (Baumann, 2022).

¹⁸A recombinação foi um ponto de transição fundamental, onde o universo deixou de ser opaco e passou a ser transparente à radiação, permitindo a formação dos primeiros átomos e liberando a radiação que podemos observar até hoje como a RCF (Ryden, 2016).

O entendimento do raio comóvel de Hubble crescendo introduz o problema de horizonte e de planura. Dito isso, a solução simples para esses problemas seria conjecturar uma fase decrescente para o raio de Hubble¹⁹ no Universo primordial

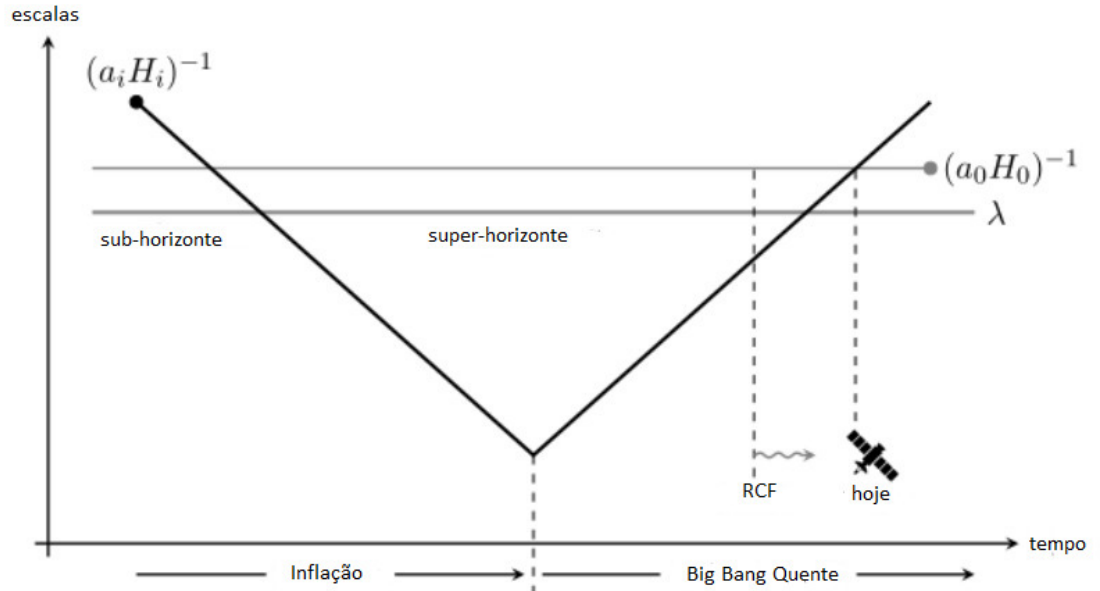
$$\boxed{\frac{d}{dt} (aH)^{-1} < 0}. \quad (3.3)$$

A esfera de Hubble cada vez menor é a definição fundamental da inflação, uma vez que relaciona-se mais diretamente com o problema do horizonte e é também uma característica fundamental do mecanismo inflacionário para gerar flutuações (Baumann, 2022). Usando $aH = \dot{a}$, mostra-se que (3.3) é o mesmo que $\ddot{a} > 0$ (um período de expansão acelerada). Esta conclusão matemática leva à inflação e se ela dura tempo o suficiente, então os problemas de horizonte e planura podem ser evitados.

O comportamento decrescente do raio de Hubble também explica como as flutuações de densidade observadas na RCF podem ser correlacionadas em escalas do super-horizonte (Baumann, 2022). Para ilustrar, veja a Fig. 5, que mostra uma escala comóvel λ fixa em relação ao raio de Hubble $(a_i H_i)^{-1}$. Se a inflação durar tempo suficiente, a flutuação arbitrária λ começa a sua evolução dentro do horizonte de partículas $(a_0 H_0)^{-1}$, ou seja, no sub-horizonte, onde os processos causais podem gerar correlações não triviais, essenciais para a formação das estruturas em larga escala. Conforme o Universo passa por *e-folds*, a flutuação transiciona para super-horizonte; no entanto, é previsto que eventualmente ela retorne ao regime de sub-horizonte, como observado na Fig. 5, e, depois disso, tal flutuação pode passar por processo de colapso gravitacional (Baumann, 2022).

¹⁹O raio de Hubble e o horizonte de partículas estão ambos relacionados à causalidade, mas com significados distintos. O raio de Hubble, $(aH)^{-1}$, representa a distância máxima que as partículas podem percorrer durante a expansão do Universo, sendo associado ao tempo H^{-1} , que é o tempo necessário para o fator de escala dobrar. Partículas separadas por distâncias maiores que o raio de Hubble não podem se comunicar agora. Já o horizonte de partículas se refere a uma distância maior que as partículas nunca poderiam ter percorrido e, portanto, nunca teriam se comunicado. A inflação amplia o horizonte das partículas para que ele seja muito maior que o raio de Hubble, permitindo que as partículas estivessem em contato causal no início do Universo, o que explica as correlações no super-horizonte e o equilíbrio térmico observado na RCF (Baumann, 2022).

Figura 5 – Ilustração da maneira como a inflação resolve o problema das correlações do super-horizonte. É mostrado uma flutuação representativa λ que parece estar fora do horizonte quando o RCF foi criada, mas estava dentro do horizonte causal durante a inflação (Baumann, 2022).



Fonte: Adaptado de Baumann (2022).

3.2 A física da inflação

Na seção anterior, concluímos a condição básica para que os problemas de horizonte e de planura possam ser evitados por meio do período de expansão acelerada. Agora, introduzimos um mecanismo físico que dá origem a essa restrição.

No mecanismo inflacionário, quantidades físicas como o campo *inflaton* ϕ , a taxa de expansão H , a densidade de energia ρ devem variar lentamente, garantindo uma fase sustentada de expansão quase exponencial, em contraste com a rápida expansão do espaço. (Baumann, 2022). Este ponto é ilustrado quando escrevemos a derivada temporal do raio de Hubble comóvel como

$$\frac{d}{dt} (aH)^{-1} = (-1) \frac{(\dot{a}H + a\dot{H})}{(aH)^2} = (-1) \left(\frac{1}{a} \frac{H^2}{H^2} + \frac{1}{a} \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = -\frac{1}{a} (1 - \varepsilon),$$

onde introduzimos o **parâmetro de *slow-roll***

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d \ln H}{dN}, \quad (3.4)$$

com $dN \equiv d \ln a = H dt$.

É possível associar o raio de Hubble cada vez menor, $\partial_t (aH)^{-1} < 0$, a $\varepsilon < 1$, conforme os cálculos apresentados acima. A quase invariância de escala das flutuações observadas na RCF exige que $\varepsilon \ll 1$. Ademais, a inflação deve durar tempo suficiente (geralmente pelo menos 40 a 60 *e-folds*), o que requer que ε permaneça pequeno por um número grande o suficiente de tempos de Hubble (Baumann, 2022). Esta condição é medida por um segundo parâmetro de *slow-roll*

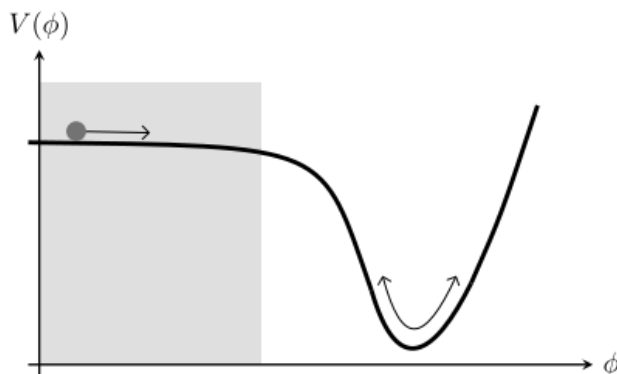
$$\eta \equiv \frac{d \ln \varepsilon}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d \ln \varepsilon}{dt} = \frac{1}{H} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon}. \quad (3.5)$$

Para $|\eta| < 1$, a variação fracionária de ε por *e-fold* é pequena e a inflação persiste.

3.3 Dinâmica do Campo Escalar

Os modelos mais simples de inflação descrevem sua dinâmica em termos da evolução de um campo escalar,²⁰ $\phi(t)$, denominado ***inflaton***. Cada valor desse campo está associado uma densidade de energia potencial, $V(\phi)$ (ver Fig. 6).

Figura 6 – Exemplo de potencial de *slow-roll*. O campo escalar *inflaton* está representado pela bola. A inflação ocorre na parte sombreada do potencial; no poço de potencial, há o reaquecimento do Universo, onde as partículas do modelo padrão são formadas



Fonte: Ref. (Baumann, 2022).

²⁰O campo escalar é um invariante sob transformações de Lorentz.

Quando o campo varia no tempo, ele carrega uma densidade de energia cinética dada por $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. Quando a energia associada ao campo escalar domina o Universo, então o *background* FLRW entra em vigor (Baumann, 2022). O objetivo dessa seção é determinar as condições sob as quais esse regime leva a uma expansão inflacionária.

A ação do campo escalar envolve uma parte cinética e outra potencial (Ryder (2009)), como descrito a seguir:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.6)$$

A equação de movimento que descreve a dinâmica pode ser derivada pela variação da ação em relação ao campo escalar ϕ , com a condição de que essa variação seja igual a zero, o que configura o Princípio da Mínima Ação (PMA). Alteramos $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$, pois o operador nabla atua sobre o campo escalar $\phi(t)$.²¹ Dito isso,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (3.7)$$

Agora podemos variar a ação (3.6)

$$\delta_\phi S \equiv \frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta_\phi \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \partial_\nu \delta_\phi \phi) - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta_\phi \phi \right]. \quad (3.8)$$

Notamos que os termos que estão dentro dos parênteses possuem um vínculo com a regra do produto da seguinte forma

$$\partial_\mu \delta_\phi \phi \partial_\nu \phi = \partial_\mu (\delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) - \delta_\phi \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (3.9)$$

e

$$\partial_\mu \phi \partial_\nu \delta_\phi \phi = \partial_\nu (\delta_\phi \phi \partial_\mu \phi) - \delta_\phi \phi \partial_\nu \partial_\mu \phi, \quad (3.10)$$

por isso podemos substituir as Eqs. (3.9) e (3.10) em (3.8):

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \partial^\nu \partial_\nu \phi \delta_\phi \phi - \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) + g^{\nu\mu} \partial_\mu (\delta_\phi \phi \partial_\nu \phi)] - \frac{\partial V}{\partial \phi} \delta_\phi \phi \right\},$$

onde renomeamos os índices no último termo, fazendo $\mu \rightarrow \nu$. Daí, lembramos que o

²¹A expressão para o *inflaton* $\phi = \phi(t)$ significa que o campo escalar ϕ depende apenas do tempo e não das coordenadas espaciais, ou seja, o campo é homogêneo no espaço.

tensor métrico é simétrico e fazemos

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left(\partial^\nu \partial_\nu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \delta_\phi \phi - \sqrt{-g} \partial^\nu (\delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) \right].$$

Aplicamos novamente uma regra do produto com o objetivo de identificar um termo de superfície:

$$\partial^\nu (\sqrt{-g} \delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) = \partial^\nu (\sqrt{-g}) (\delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} \partial^\nu (\delta_\phi \phi \partial_\nu \phi),$$

isolamos o último termo e substituímos na variação da ação

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left(\partial^\nu \partial_\nu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \delta_\phi \phi - \partial^\nu (\sqrt{-g} \delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) + \partial^\nu (\sqrt{-g}) (\delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) \right]. \quad (3.11)$$

Munidos do resultado (A.22)²²

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda \sqrt{-g},$$

o escrevemos da seguinte forma

$$g^{\nu\lambda} \partial_\lambda \sqrt{-g} = \sqrt{-g} g^{\nu\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \implies \partial^\nu (\sqrt{-g}) = \sqrt{-g} g^{\nu\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^\mu.$$

e substituímos esse resultado no último termo da Eq. (3.11), além disso também distribuímos a integral, veja:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\partial^\nu \partial_\nu \phi + g^{\nu\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \partial_\nu \phi - \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \delta_\phi \phi - \int d^4x \partial^\nu (\sqrt{-g} \delta_\phi \phi \partial_\nu \phi).$$

Definimos $W_\nu \equiv \sqrt{-g} \delta_\phi \phi \partial_\nu \phi$, e, pelo Teorema de Gauss, observamos a relação do termo de superfície com o hipervolume:

$$\int d^4x \partial^\nu (\sqrt{-g} \delta_\phi \phi \partial_\nu \phi) = \int_\Omega d^4x \partial^\nu W_\nu = \int_{\partial\Omega} d^3x n^\nu W_\nu = \int_{\partial\Omega} d^3x (n^\nu \sqrt{-g} \partial_\nu \phi) \delta_\phi \phi,$$

onde Ω é o termo volumétrico, $\partial\Omega$ o termo de superfície e n^ν o vetor normal unitário exterior. Note que $\delta_\phi \phi = 0$ na superfície tridimensional. Portanto, esse termo de superfície

²²Resultado encontrado no Apêndice A.

pode ser desprezado, e assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta\phi} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\partial^\nu \partial_\nu \phi + g^{\nu\lambda} \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \partial_\nu \phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} \right) \delta_\phi \phi \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(\partial^\nu \partial_\nu \phi + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \partial^\lambda \phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} \right) \delta_\phi \phi.\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \phi = \nabla_\nu (\partial^\nu \phi) = \partial_\nu \partial^\nu \phi + \Gamma_{\nu\lambda}^\nu \partial^\lambda \phi = \partial^\nu \partial_\nu \phi + \Gamma_{\lambda\nu}^\nu \partial^\lambda \phi = \partial^\nu \partial_\nu \phi + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \partial^\lambda \phi,$$

e, desta forma, podemos finalmente fazer a substituição

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\nabla_\nu \nabla^\nu \phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} \right) \delta_\phi \phi.$$

Estamos em uma integração de volume, por isso $\delta_\phi \phi \neq 0$. Com base nessa argumentação, o termo dentro do parênteses deve ser igual a zero para que a variação da ação satisfaça o PMA. Dito isso

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \phi - \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \implies \nabla_\nu \nabla^\nu \phi = \frac{\partial V}{\partial\phi},$$

onde $\square \equiv \nabla_\nu \nabla^\nu$. Portanto, obtemos a equação de Klein-Gordon

$$\boxed{\square\phi = \frac{\partial V}{\partial\phi}}. \quad (3.12)$$

Para especificar a equação de movimento na métrica que descreve a cosmologia padrão, aplicamos a definição de derivada covariante atuando sobre o campo escalar e, em seguida, expandimos o símbolo de Christoffel em suas componentes temporais e espaciais, veja:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu \nabla^\nu \phi &= \partial^\nu \partial_\nu \phi + \Gamma_{\lambda\mu}^\mu \partial^\lambda \phi = \partial^0 \partial_0 \phi + \partial^i \partial_i \phi + \Gamma_{\lambda 0}^0 \partial^\lambda \phi + \Gamma_{\lambda j}^j \partial^\lambda \phi \\ &= \partial^0 \partial_0 \phi + \partial^i \partial_i \phi + \Gamma_{00}^0 \partial^0 \phi + \Gamma_{i0}^0 \partial^i \phi + \Gamma_{0j}^j \partial^0 \phi + \Gamma_{ij}^j \partial^i \phi.\end{aligned}$$

Expandimos os símbolos que possuem somente uma componente temporal, pois segundo a Ref. (Carroll, 2019) temos ciência de que Γ_{00}^0 e Γ_{i0}^0 são iguais a zero.²³ Daí, usando o

²³No Apêndice B, demonstramos um exemplo deste resultado retornando zero. Resultado obtido na

fato de que $\phi = \phi(t)$ temos

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \phi = \partial^0 \partial_0 \phi + \partial^i \partial_i \phi + \Gamma_{00}^0 \partial^0 \phi + \Gamma_{i0}^0 \partial^i \phi + \Gamma_{0j}^j \partial^0 \phi + \Gamma_{ij}^j \partial^i \phi.$$

Assim, só nos resta

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \phi = \partial^0 \partial_0 \phi + \Gamma_{0j}^j \partial^0 \phi. \quad (3.13)$$

Com os resultados (B.4), (B.5) e (B.6) - obtidos no Apêndice B - para $\Gamma_{01}^1, \Gamma_{02}^2$ e Γ_{03}^3 , concluímos

$$\nabla_\nu \nabla^\nu \phi = -\ddot{\phi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}.$$

Agora, podemos retornar na equação de Klein-Gordon (3.12) para um espaço-tempo curvo e substituímos o resultado obtido acima, veja

$$-\ddot{\phi} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi} \implies \ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}.$$

Conhecendo a função de Hubble $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, temos a equação de movimento²⁴ para o campo escalar ϕ

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}}, \quad (3.14)$$

onde $3H\dot{\phi}$ é o termo conhecido como **fricção de Hubble**. Esta fricção tem papel crucial na dinâmica inflacionária, pois atua como um termo de dissipação que modula a evolução do campo escalar ϕ durante a inflação. Desta forma, garante que o campo escalar evolua de maneira controlada e suave, permitindo a expansão acelerada do Universo e a resolução dos problemas cosmológicos (Linde, 2004, 2007).

Assumindo que este campo escalar domina o Universo, podemos determinar seu efeito na expansão. As equações de Friedmann podem ser utilizadas após determinarmos a densidade de energia e a pressão associadas a ϕ . Dada a forma da ação na Eq. (3.7), é natural supor que a densidade de energia é a soma da densidade da energia cinética com o potencial do campo escalar, ou seja, o Hamiltoniano

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (3.15)$$

Eq. (B.3).

²⁴Uma maneira mais minuciosa de demonstrar a equação de Klein-Gordon no contexto cosmológico será abordada no Apêndice B.

Isso determinará a taxa de expansão, pois $3M_{\text{Pl}}^2 H^2 = \rho_\phi$, sendo $M_{\text{Pl}}^2 = \frac{1}{8\pi G}$ a massa de Planck. Esta igualdade é derivada da equação de Friedmann (2.20) com $\kappa = 0$. Ao calcular a derivada temporal da densidade de energia na Eq. (3.15), temos

$$\dot{\rho}_\phi = \left(\frac{1}{2} 2\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) = \left(\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \dot{\phi}.$$

Utilizando o resultado da Eq. (3.14) escrevemos

$$\dot{\rho}_\phi = \left(-3H\dot{\phi} \right) \dot{\phi} = -3H\dot{\phi}^2.$$

Comparando esse resultado com a equação de continuidade (2.11)

$$\dot{\rho}_\phi = -3H(\rho_\phi + P_\phi), \quad (3.16)$$

inferimos que

$$-3H\dot{\phi}^2 = -3H(\rho_\phi + P_\phi) \implies \dot{\phi}^2 = \rho_\phi + P_\phi. \quad (3.17)$$

Substituindo (3.15) em Eq. (3.17), temos que a pressão induzida pelo campo será:

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.18)$$

Essa pressão determinará a aceleração de expansão vinculada à equação de Raychaudhuri (2.21), $\ddot{a} \propto -(\rho_\phi + 3P_\phi)$. Note, entretanto, que, caso a energia cinética da inflação seja muito menor do que a energia potencial, então

$$-P_\phi \approx \rho_\phi, \quad (3.19)$$

conforme a proporcionalidade entre a densidade ρ e V mostrada em (3.15). Isto é, o potencial inflacionário atua temporariamente como uma constante cosmológica, promovendo um período de expansão exponencial.

3.4 Inflação *Slow-Roll*

Durante o período de inflação *slow-roll*, o campo escalar ϕ evolui muito lentamente em relação à sua energia potencial, o que resulta em uma expansão acelerada do Universo, apesar de o intervalo de tempo ser muito curto. Esse modelo é amplamente utilizado para explicar os primeiros momentos do Universo, logo após o Big Bang. A dinâmica durante a inflação é determinada por uma combinação entre a equação de Friedmann²⁵

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right], \quad (3.20)$$

e a equação de Klein-Gordon (3.14). Nesta seção, vamos determinar os resultados gerados pelos acoplamentos dessas duas equações.

3.4.1 Um campo rolando lentamente

Iniciamos a subseção notando que as Eqs. (3.20) e (3.14) podem ser acopladas em uma expressão para evolução do parâmetro de Hubble. Assim, fazemos

$$\frac{d}{dt} (H)^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{1}{2} \frac{d\dot{\phi}^2}{dt} + \frac{dV}{dt} \right) \implies 2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left(\ddot{\phi}\dot{\phi} + \frac{dV}{dt} \right). \quad (3.21)$$

Com equação de movimento (3.14) obtemos a variação temporal do potencial V , veja

$$-\frac{dV}{dt} = \left(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \right) \frac{d\phi}{dt} \implies -\frac{dV}{dt} = \ddot{\phi}\dot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2.$$

Munidos deste resultado, substituímos na Eq. (3.21) e obtemos, finalmente, a variação temporal do parâmetro de Hubble

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2}. \quad (3.22)$$

²⁵Para um modelo de universo isotrópico e homogêneo, a Eq. (2.20) pode ser escrita como $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$ para $\kappa = 0$. Sabendo que $M_{\text{Pl}}^2 = \frac{1}{8\pi G}$ e ρ é a Eq. (3.15), então concluímos a Eq. (3.20).

Fazendo a razão entre a Eq. (3.22) e Eq.(3.20) obtemos

$$\varepsilon = \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2 M_{\text{Pl}}^2}. \quad (3.23)$$

A solução teórica para os problemas do MCP ocorre quando a densidade de energia cinética, $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, tem uma contribuição pequena para a densidade de energia total, $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V$. Esta situação é conhecida como **inflação *slow-roll***. O comportamento *slow-roll* se mantém enquanto a aceleração do campo escalar também for pequena (Baumann, 2022). Aqui, definimos uma aceleração adimensional em termos do tempo de Hubble

$$\delta \equiv -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \quad (3.24)$$

para configurar essa baixa aceleração. Quando δ é pequeno, o termo de fricção em Eq.(3.14) domina, e a velocidade do *inflaton* é determinada pela inclinação do potencial. Ademais, enquanto δ for pequeno, a energia cinética do *inflaton* permanece subdominante, e a expansão inflacionária continua (Baumann, 2022). Confirmamos esse argumento ao efetuar a derivada temporal da Eq. (3.23)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \right] = \frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} \left[\frac{2\dot{\phi}\ddot{\phi}}{H^2} + \dot{\phi}^2 (-2) H^{-3} \dot{H} \right] = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{H^2} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{H^3} \right),$$

e então substituímos no segundo parâmetro de *slow-roll* dado pela Eq. (3.5)

$$\eta = \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon} = \frac{2M_{\text{Pl}}^2 H^2}{\dot{\phi}^2 H} \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{H^2} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{H^3} \right) = \frac{2H}{\dot{\phi}^2} \left(\frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{H^2} - \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{H^3} \right),$$

portanto

$$\eta = 2 \left(\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} - \frac{\dot{H}}{H^2} \right) = 2(\varepsilon - \delta).$$

Isto mostra que $\{\varepsilon, |\delta|\} \ll 1$ implica em $\{\varepsilon, |\eta|\} \ll 1$. Essas são as condições que levam as Eqs. (3.20) e (3.14) à inflação. Se a velocidade e a aceleração do campo *inflaton* são ambas pequenas, então a expansão inflacionária durará por muito tempo (Baumann, 2022).

3.4.2 Aproximação *slow-roll*

Até agora notamos que em um regime onde $\{\varepsilon, |\delta|\} \ll 1$, a inflação ocorre e persiste. A seguir, utilizaremos essas condições para simplificar a equação de movimento (3.14) e a equação de Friedmann (3.20). Isto é chamado de **aproximação *slow-roll***.

Primeiro, notamos que a condição de *slow-roll* $\dot{\phi}^2 \ll V$ impõe que $\varepsilon \ll 1$. Assim, há a seguinte simplificação para a Eq. (3.20),

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_{\text{Pl}}^2}. \quad (3.25)$$

Na aproximação *slow-roll*, a taxa da expansão de Hubble é determinada pelo potencial V . Simplificamos a Eq. (3.14) através da condição $|\delta| \ll 1$

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{dV}{d\phi}, \quad (3.26)$$

pois $\delta \propto \ddot{\phi}$. Isto possibilita uma relação simples entre a inclinação do potencial e a velocidade do campo escalar (Baumann, 2022). Desta forma, substituímos estas duas aproximações na Eq. (3.23) e teremos

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{\text{Pl}}^2 H^2} \approx \frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} \left(-\frac{dV}{d\phi} \frac{1}{3H} \right)^2 \frac{3M_{\text{Pl}}^2}{V} \approx \frac{3}{2V} \left(\frac{dV}{d\phi} \right)^2 \left(\frac{1}{9H^2} \right),$$

daí substituindo H^2 mais uma vez

$$\varepsilon \approx \frac{1}{6V} \left(\frac{dV}{d\phi} \right)^2 \frac{3M_{\text{Pl}}^2}{V} \approx \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2. \quad (3.27)$$

No contexto da aproximação *slow-roll* estudamos o parâmetro δ , definida na Eq. (3.24), quando tomamos a derivada temporal da Eq. (3.26), veja

$$\frac{d}{dt} (3H\dot{\phi}) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{dV}{d\phi} \right) \implies 3\dot{H}\dot{\phi} + 3H\ddot{\phi} = -\frac{d^2V}{d\phi^2} \dot{\phi}.$$

Este resultado permite escrever

$$\frac{3\dot{H}\dot{\phi}}{3H^2\dot{\phi}} + \frac{3H\ddot{\phi}}{3H^2\dot{\phi}} = -\frac{d^2V}{d\phi^2} \dot{\phi} \frac{1}{3H^2\dot{\phi}} \implies \frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = -\frac{1}{3H^2} \frac{d^2V}{d\phi^2},$$

então substituímos a aproximação feita na equação de Friedmann e obtemos

$$\frac{\dot{H}}{H^2} + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = -\frac{d^2V}{d\phi^2} \frac{3M_{\text{Pl}}^2}{3V} \implies -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2},$$

portanto notamos que

$$\delta + \varepsilon \approx \frac{M_{\text{Pl}}^2}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2}.$$

Assim, através dos **parâmetros de potencial *slow-roll***

$$\varepsilon_V \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\phi} \right)^2, \quad \eta_V \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{V} \frac{d^2V}{d\phi^2}. \quad (3.28)$$

podemos concluir se o potencial associado possibilita a inflação. Uma inflação bem sucedida ocorre quando estes parâmetros são $\varepsilon_V, \eta_V \ll 1$. Buscamos encontrar a relação entre ε e ε_V , para isso precisamos obter V quando o isolamos na Eq. (3.20), veja

$$H^2 3M_{\text{Pl}}^2 - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = V,$$

A condição $\varepsilon \ll 1$ aplicada à Eq. (3.4), aproximar o potencial como $V \approx H^2 3M_{\text{Pl}}^2$. Ademais, como estamos no regime de *slow-roll*, podemos considerar $\ddot{\phi} \rightarrow 0$, de modo que $3H\dot{\phi} \approx -V'$. Com estes resultados calculamos

$$\varepsilon_V = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left[\frac{(-3H\dot{\phi})}{H^2 3M_{\text{Pl}}^2} \right]^2,$$

assim

$$\varepsilon_V \approx \frac{\dot{\phi}^2}{2H^2 M_{\text{Pl}}^2}.$$

O lado direito dessa equação é precisamente a Eq. (3.23) para ε . Logo,

$$\varepsilon_V \approx \varepsilon.$$

Além disso, queremos saber o número total de *e-folds* da expansão acelerada em um regime de aproximação *slow-roll*. Por isso, executamos os seguintes passos

$$N_{\text{tot}} \equiv \int_{a_i}^{a_e} d \ln a = \int_{t_i}^{t_e} H(t) dt = \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi,$$

onde t_i e t_e são os tempos definidos quando $\varepsilon(t_i) = \varepsilon(t_e) \equiv 1$, já que neste cenário a condição de *slow-roll* já não se aplica mais. Além disso, podemos usar a expressão (3.23) para escrever

$$2\varepsilon_V \approx \frac{\dot{\phi}^2}{H^2 M_{\text{Pl}}^2} \Rightarrow \dot{\phi} \approx H M_{\text{Pl}} \sqrt{2\varepsilon_V}.$$

Consequentemente:

$$N_{\text{tot}} \approx \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} \frac{|d\phi|}{M_{\text{Pl}}}, \quad (3.29)$$

onde ϕ_i e ϕ_e são os valores do campo nos limites do intervalo onde $\varepsilon_V = 1$. O valor absoluto em torno da medida de integração na Eq. (3.29) indica que devemos escolher o sinal geral da integral de tal forma que $N_{\text{tot}} > 0$, pois no regime de *slow-roll* o campo vem de valores maiores e tende para valores menores (Baumann, 2022). Uma solução para o problema do horizonte requer $50 < N_{\text{tot}} < 60$ (Ade *et al.*, 2021; German; Gonzalez; Colorado, 2023), conforme observações cosmológicas, o que fornece uma importante restrição em modelos inflacionários bem-sucedidos.

3.4.3 Estudo de caso: Inflação quadrática

Como exemplo, vamos analisar o modelo de inflação provavelmente mais simples e exemplo de potencial *ad hoc*: a inflação de campo único impulsionada por um termo de massa

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2.$$

Este modelo é descartado pelas observações da RCF (Baumann, 2022). As configurações de *slow-roll* para este potencial são calculados adiante. Precisamos da primeira e da segunda derivada do potencial V em relação a ϕ . Assim, fazemos

$$V' = \frac{1}{2} m^2 (2\phi) = m^2 \phi, \quad \text{sendo} \quad V' \equiv \frac{dV}{d\phi}$$

e

$$V'' = m^2, \quad \text{onde} \quad V'' \equiv \frac{d^2V}{d\phi^2}.$$

De imediato, calculamos os parâmetros ε_V e η_V conforme a Eq. (3.28) e concluimos

$$\varepsilon_{V(\phi)} = \eta_{V(\phi)} = 2 \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi} \right)^2. \quad (3.30)$$

O final da inflação acontece quando $\varepsilon_{V(\phi_e)} = 1$. Substituímos este resultado na equação acima e consideramos valores *transplanckianakianos*, isto é $\phi \gg M_{\text{Pl}}$, para concluir

$$\phi_e \equiv \sqrt{2}M_{\text{Pl}}. \quad (3.31)$$

Seja ϕ_i o valor inicial do campo. À medida que o campo se move de ϕ_i para ϕ_e , a *e-folds* da expansão inflacionária é (para modelos de *large-field*)²⁶

$$N_{\text{tot}} = - \int_{\phi_i}^{\phi_e} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} \frac{|d\phi|}{M_{\text{Pl}}} = \int_{\phi_e}^{\phi_i} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V}} \frac{d\phi}{M_{\text{Pl}}},$$

então substituímos (3.30) no resultado acima e obtemos

$$N_{\text{tot}} = \int_{\phi_e}^{\phi_i} \frac{1}{\sqrt{4 \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi} \right)^2}} \frac{d\phi}{M_{\text{Pl}}} = \int_{\phi_e}^{\phi_i} \frac{1}{2 \left(\frac{M_{\text{Pl}}}{\phi} \right)} \frac{d\phi}{M_{\text{Pl}}} = \frac{1}{2M_{\text{Pl}}^2} \left(\frac{\phi^2}{2} \right) \Big|_{\phi_e}^{\phi_i},$$

por conseguinte

$$N_{\text{tot}} = \frac{1}{4M_{\text{Pl}}^2} (\phi_i^2 - \phi_e^2).$$

Mas sabemos da relação (3.31), então

$$N_{\text{tot}} = \frac{\phi_i^2}{4M_{\text{Pl}}^2} - \frac{1}{2}.$$

Já que estamos em um regime no qual $\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \gg 1$, teremos

$$N(\phi) \approx \frac{\phi^2}{4M_{\text{Pl}}^2}. \quad (3.32)$$

²⁶No modelo de *large-field* o campo *inflaton* inicia sua trajetória em grandes valores e evolui para o mínimo localizado na origem $\phi = 0$. Caso a evolução seja *transplanckiana*, $\Delta\phi > M_{\text{Pl}}$, a amplitude das ondas gravitacionais produzidas durante esse período seriam observadas no futuro.

Para obter $N_{\text{tot}} > 50$, o valor do campo inicial deve satisfazer

$$\phi_i > 2\sqrt{50}M_{\text{Pl}} \sim 14M_{\text{Pl}}.$$

Isso realmente mostra que o campo escalar executa uma excursão no regime de energia maior que M_{Pl} , o qual é chamado de regime *transplanckiano*. Estudamos mais profundamente esse modelo inflacionário quando analisamos também outros dois parâmetros fundamentais na cosmologia, mencionados a seguir.

O *tilt* escalar e a razão tensorial-escalar são parâmetros essenciais na caracterização das perturbações primordiais geradas durante a inflação cósmica. Eles estão relacionados às propriedades do espectro de potência dessas perturbações, que podem ser detectadas através de observações da RCF e de grandes estruturas no Universo. Descrevemos a seguir brevemente os seus comportamentos.

- O *tilt* escalar n_s descreve o desvio do espectro de potência das perturbações escalares (flutuações de densidade) em relação a um espectro exatamente plano (escala invariante). Tem como definição matemática²⁷

$$P_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{n_s-1}$$

onde $P_{\mathcal{R}}(k)$ é o espectro de potência das perturbações escalares e k é o número de onda. Caso $n_s = 1$ temos um espectro plano e correspondente a invariância de escala. Caso $n_s > 1$ então o espectro tem mais potência em escalas maiores.²⁸ Por fim, se $n_s < 1$ o comportamento do espectro apresenta mais potência em escalas menores, isto é, em comprimentos de onda da escala mais curtos (Dodelson, 2003; Liddle; Lyth, 2000).

- A razão tensorial-escalar r quantifica a relação entre as amplitudes das perturbações tensoriais (ondas gravitacionais primordiais) e escalares e tem como definição

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s},$$

²⁷Confira Eq. (8.97) da Ref. (Baumann, 2022).

²⁸Escalas maiores correspondem a estruturas grandes no Universo, como superaglomerados de galáxias. Essas escalas têm valores baixos de k (o número de onda está relacionado ao inverso do comprimento da escala $k \sim 1/\lambda$), ou seja, estão relacionados a comprimentos de onda mais longos (Dodelson, 2003; Liddle; Lyth, 2000).

onde A_t é a amplitude tensorial e A_s a amplitude escalar. Caso $r > 0$, então há presença de ondas gravitacionais primordiais geradas durante a inflação. Se $r = 0$, nenhuma contribuição detectável das perturbações tensoriais. Os limites atuais para r são $r < 0,036$ (com 95% de confiança, segundo a Ref. (Ade *et al.*, 2021)). Esses limites fornecem fortes restrições aos modelos de inflação, especialmente aqueles que preveem maiores amplitudes de ondas gravitacionais (Dodelson, 2003; Liddle; Lyth, 2000).

Neste modelo de inflação quadrática em questão, podemos estudar o *tilt* escalar n_s e a razão tensorial-escalar r quando definimos (3.32) para uma escala de referência k_* .²⁹

4 MODELO DE STAROBINSKY

A título de contextualização do modelo de Starobinsky, é necessário comentar que ele se caracteriza como uma extensão da RG, pois propõe a inclusão de termos de curvatura de ordem superior ao R , como visto na ação de Einstein-Hilbert, trabalhada no Apêndice A. A RG, por ser uma teoria não renormalizável, não é convencionalmente quantizável. Sabemos que, desde o século passado, há uma busca incessante para remediar essa característica da RG. Dentro dessa problemática, a inclusão desses termos ganha importância, pois contribui para a renormalização (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022; Stelle, 1977).

Alan Guth, em 1981, propôs pela primeira vez a ideia de que o Universo passou por uma fase de expansão extremamente rápida (inflação) nos primeiros momentos após o Big Bang e esse mecanismo resolveria os problemas cosmológicos. O modelo de inflação dele era baseado em um campo escalar *ad hoc* que governaria a expansão do Universo primordial, antes da evolução mais lenta e contínua que veio após essa fase acelerada (Guth, 1980). Um dos primeiros modelos para correção dos problemas apresentados na cosmologia padrão, comentados no Capítulo 3, foi escrito por A. Starobinsky em 1983. Ele considerou a seguinte ação

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad \text{onde } f(R) \equiv R + \frac{R^2}{6M^2}. \quad (4.1)$$

Ou seja, além do escalar de Ricci convencional mostrado na Eq. (A.28), Starobinsky propôs a adição de um escalar de Ricci quadrático à ação, munido de um fator multiplicativo. Este termo quadrático é uma correção que se torna relevante em altas curvaturas do espaço-tempo.

Diferentemente dos modelos de inflação antiga, o modelo de Starobinsky não sofre do problema de saída elegante - o período de expansão acelerada exponencialmente é seguido pela época de radiação e depois da era de matéria (Starobinsky, 1984; Vilenkin, 1985). A inflação de Starobinsky, caracteriza adequadamente as observações cosmológicas atuais a partir de um único parâmetro livre, também fornece previsões para observáveis como o escalar índice espectral n_s e a razão tensorial-escalar r (Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2023). Por fim, o modelo que escolhemos estudar inicialmente prediz espectros quase

invariantes de escala de ondas gravitacionais e anisotropias da temperatura consistentes com a RCF (Mukhanov; Chibisov, 1981; Starobinsky, 1979).

4.1 Multiplicador de Lagrange

É possível aplicar redefinições no campo em uma teoria de campo, com o intuito de reescrever a ação ou as equações de campo. Para deixar a ação (4.1) com aspecto semelhante ao *frame* de EH,³⁰ iremos fazer algumas alterações algébricas. Assim, consideramos a ação alternativa introduzindo um campo escalar auxiliar χ via técnica de multiplicador de Lagrange

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + (R - \chi) f_{,\chi}], \quad (4.2)$$

onde $f_{,\chi} \equiv \frac{\partial f}{\partial \chi}$ e demonstramos adiante sob qual condição ela retorna a Eq. (4.1). Essa ação reduz-se à ação de Starobinsky quando calculamos a variação da Eq. (4.2) em relação ao campo auxiliar χ . Então, fazemos

$$\frac{\delta S}{\delta \chi} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\delta f(\chi)}{\delta \chi} + \frac{\delta(R - \chi)}{\delta \chi} \frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} + (R - \chi) \frac{\delta}{\delta \chi} \left[\frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} \right] \right\}.$$

Conhecendo

$$\frac{\delta \xi(\chi)}{\delta \chi} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial \chi} \delta \chi,$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \chi} &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} \delta \chi + \frac{\partial(R - \chi)}{\partial \chi} \delta \chi \frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} + (R - \chi) \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} \right] \delta \chi \right\} \\ &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[(R - \chi) \frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} \right] \delta \chi. \end{aligned}$$

Sabemos que a maximização acontece quando aplicamos o princípio de mínima

³⁰Em resumo, o *frame* de Einstein-Hilbert é a estrutura matemática que liga a gravitação à geometria do espaço-tempo, a partir da qual derivam as equações de campo de Einstein através da ação relativística, as quais governam a dinâmica do universo em grandes escalas.

ação $\delta S = 0$ e $\delta\chi \neq 0$ em um hipervolume. Isto acontece sob duas hipóteses:

$$(R - \chi) \frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} = 0 \text{ se } \begin{cases} (R - \chi) = 0 \\ \frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} = 0 \end{cases}.$$

A hipótese $\frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} = 0$ é desprezada, pois esta seria uma simplificação drástica, por isso optamos em fazer

$$R - \chi = 0,$$

logo

$$\boxed{R = \chi}. \quad (4.3)$$

Sob esta condição, vemos

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + (\chi - \chi) f_{,\chi}] = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R),$$

como a ação de Starobinsky na Eq. (4.1).

Definimos $\varphi = \frac{\partial f}{\partial \chi}$ como o multiplicador de Lagrange e substituímos na Eq. (4.2).

Daí, substituindo φ temos a ação escrita em termos de φ não acoplada minimamente

$$\begin{aligned} S &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi(\varphi)) + (R - \chi(\varphi)) \varphi] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} f(\chi(\varphi)) + \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \varphi R - \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \varphi \chi(\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Esta ação está escrita no *frame* de Jordan, que descreve um acoplamento do termo de curvatura à matéria, já que temos a multiplicação de φ e R . A seguir, iremos trabalhar com o potencial nesse *frame*.

4.2 *Frame* de Jordan

Nesta seção buscamos caracterizar um potencial no contexto da ação que obtivemos na Eq. (4.4). As quantidades geométricas como a curvatura espacial e a evolução do Universo são diretamente interpretáveis neste *frame*. Além disso, muitas teorias alternativas da gravitação, incluindo as teorias de $f(R)$, são frequentemente formuladas

inicialmente no *frame* de Jordan na literatura científica. Trabalhar nesse *frame* facilita a conexão com resultados e discussões existentes (Faraoni; Gunzig; Nardone, 1998; Pearson, 2012; Sotiriou; Faraoni, 2010). Neste quadro, a matéria está acoplada à métrica, porém o escalar de Ricci está explicitamente acoplado à um campo escalar extra (Pearson, 2012). No nosso caso, é o campo χ que está embutido no multiplicador de Lagrange. É no *frame* de Jordan que se estabelece a equivalência entre teorias escalares-tensoriais (como, por exemplo, a teoria de Brans-Dicke) e modelos de gravidade modificada (incluindo as teorias $f(R)$ abarcando o modelo de Starobinsky). Definimos o potencial U para este *frame* a partir de dois termos no colchetes de (4.4):

$$U(\varphi) \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} [\varphi \chi(\varphi) - f(\chi(\varphi))]. \quad (4.5)$$

Assim, temos a ação de $f(R)$ (4.4) no *frame* de Jordan, em que φ acopla-se não minimamente com R na integral de ação escrita em termos do potencial

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \varphi R - U(\varphi) \right]. \quad (4.6)$$

Agora, podemos calcular quem seja $\varphi = f_{,\chi} = \frac{\partial f}{\partial \chi}$, quando aplicamos a condição $R = \chi$:

$$\varphi = \frac{\partial f(R)}{\partial \chi} = \frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\chi + \frac{\chi^2}{6M^2} \right) = 1 + \frac{2\chi}{6M^2} = 1 + \frac{\chi}{3M^2}.$$

Isolamos χ para termos um vínculo com φ e posteriormente calcular $U(\varphi)$. Então,

$$\chi = 3M^2(\varphi - 1). \quad (4.7)$$

Portanto, deixamos a função f escrita em termos do multiplicador φ

$$f = \left(\chi + \frac{\chi^2}{6M^2} \right) = 3M^2(\varphi - 1) + \frac{[3M^2(\varphi - 1)]^2}{6M^2} \quad (4.8)$$

já que depende somente de φ temos

$$f(\varphi) = 3M^2(\varphi - 1) + \frac{3M^2}{2}(\varphi - 1)^2.$$

Dito isto, substituímos em (4.5) as Eqs. (4.7) e (4.8), obtendo:

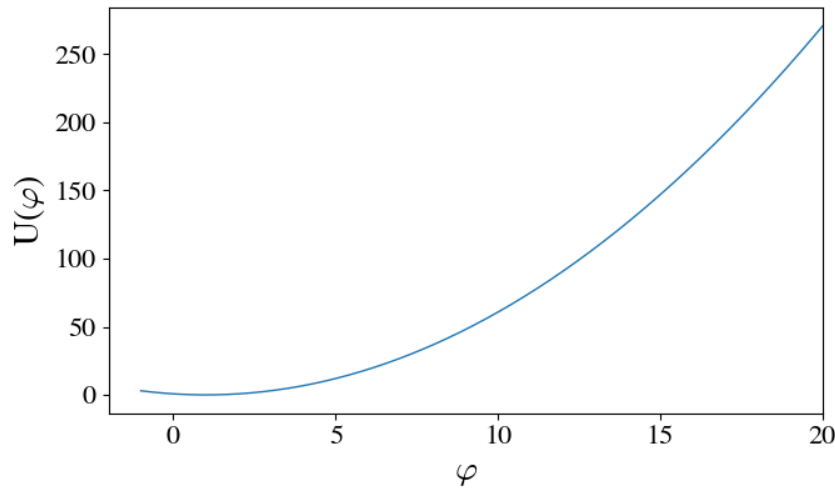
$$\begin{aligned} U(\varphi) &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left[\varphi(\varphi - 1) 3M^2 - (\varphi - 1) 3M^2 - (\varphi - 1)^2 \frac{3M^2}{2} \right] \\ &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} 3M^2 \left[(\varphi - 1)^2 - \frac{1}{2} (\varphi - 1)^2 \right], \end{aligned}$$

pois sabemos da fatoração $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Finalmente, temos o potencial de Starobinsky no *frame* de Jordan

$$U(\varphi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{4} 3M^2 (\varphi - 1)^2. \quad (4.9)$$

Podemos notar que a curva comporta-se como uma parábola na ilustração 7, conforme o esperado dado pela Eq. (4.9).

Figura 7 – Potencial de Starobinsky no *frame* de Jordan *versus* campo escalar em unidades de massa de Planck.



Fonte: Autora

4.3 Transformação conforme e *frame* de Einstein

Para analisar a dinâmica *slow-roll* do campo escalar ϕ , devemos primeiro trazer a ação S para o *frame* de Einstein, com o escalar de Ricci acoplado minimamente. Aplicar essa técnica nos remete diretamente ao *frame* geométrico observado na ação de EH. Neste *frame*, o campo escalar e o escalar de Ricci estão minimamente acoplados³¹ e ocorre quando

³¹Estar minimamente acoplado implica não existir termos na forma φR (Pearson, 2012).

aplicamos uma transformação conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ com Ω apropriado. Efetuamos este passo para que o escalar de Ricci quadrático fique embutido no campo escalar ϕ . Veremos mais claramente a seguir. Sabemos que o escalar de Ricci pode ser escrito como³²

$$R = \Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \right), \quad (4.10)$$

onde $\omega \equiv \ln \Omega$ e o til denota quantidades construídas a partir de $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Iniciamos alterando a ação da Eq. (4.6). Conhecendo R e a relação $\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$ (vide Apêndice C) fazemos

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \frac{\varphi}{\Omega^2} \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \right) - \frac{U}{\Omega^4} \right]. \quad (4.11)$$

Para vincular com a ação de Einstein-Hilbert, temos que obter o fator multiplicativo 1 ao lado de \tilde{R} , então fazemos

$$\frac{\varphi}{\Omega^2} = 1$$

portanto

$$\boxed{\varphi = \Omega^2}. \quad (4.12)$$

Assim encontramos Ω apropriado e fazemos a substituição da Eq. (4.12) em (4.11) e retornamos à ação que contém o potencial V , definindo

$$V \equiv \frac{U}{\varphi^2}, \quad (4.13)$$

daí

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \right) - V(\varphi) \right].$$

Efetuamos a propriedade distributiva

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \tilde{R} + \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} 6\tilde{\square}\omega - 6\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega - V(\varphi) \right].$$

A definição de um modelo inflacionário perpassa por uma ação do campo escalar *inflaton* ϕ em termos do escalar de curvatura, do termo cinético e do termo potencial

³²Vide Apêndice C, resultado obtido na Eq. (C.5), após fazer as devidas alterações na métrica desde o tensor métrico até o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$.

(Baumann, 2012). Matematicamente, temos

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right]. \quad (4.14)$$

Percebemos que o termo envolvendo o d'Alembertiano não aparece na Eq. (4.14), o que nos leva a analisar esse termo separadamente. Desta forma, sabendo da Eq. (C)(conferir Apêndice C), estudaremos a integral que o envolve, fazendo

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} 6\tilde{\square}\omega &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} 3M_{\text{Pl}}^2 \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \omega \right) \\ &= 3M_{\text{Pl}}^2 \int d^4x \partial_\mu \left(\sqrt{-\tilde{g}} \partial^\mu \omega \right). \end{aligned}$$

Lembramos que o Teorema de Gauss tenha forma

$$\int_\Omega dV \partial_\mu V^\mu = \int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu V^\mu,$$

identificamos $V^\mu = \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\mu \omega$ e, como o campo é fixo na superfície $\partial\Omega$, então $V^\mu = 0$.

Logo,

$$\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} 6\tilde{\square}\omega = 0.$$

Assim, vemos

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} 3M_{\text{Pl}}^2 \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega - V(\varphi) \right]. \quad (4.15)$$

Então, substituímos

$$\omega \equiv \ln \Omega = \frac{1}{2} \ln \varphi \quad (4.16)$$

na Eq. (4.15), já que $\varphi^{1/2} = \Omega$. Veja:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} 3M_{\text{Pl}}^2 \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \ln \varphi \right) \partial_\nu \left(\frac{1}{2} \ln \varphi \right) - V(\varphi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \left(\sqrt{\frac{3}{2}} M_{\text{Pl}} \ln \varphi \right) \partial_\nu \left(\sqrt{\frac{3}{2}} M_{\text{Pl}} \ln \varphi \right) - V(\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Aqui, definimos o campo *inflaton* sendo

$$\phi \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} M_{\text{Pl}} \ln \varphi. \quad (4.17)$$

Finalmente, temos a ação no *frame* de Einstein:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (4.18)$$

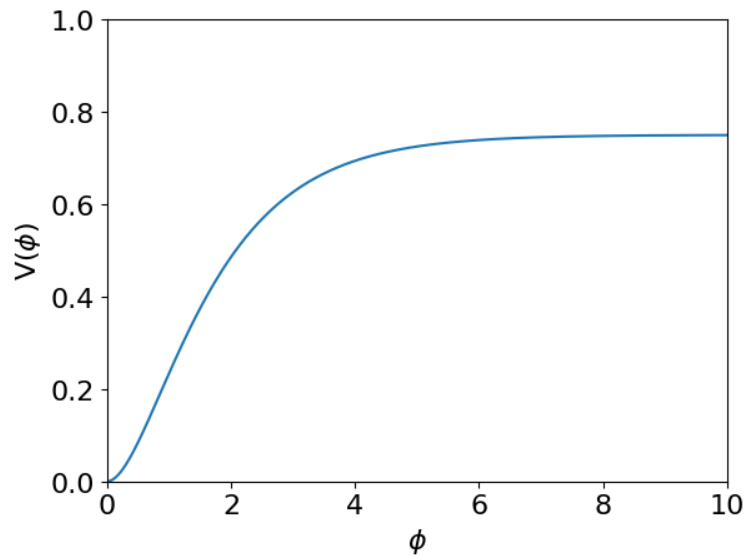
Invertendo (4.17), obtemos

$$\varphi = \exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \right). \quad (4.19)$$

Por conseguinte, substituímos (4.9) e (4.19) em (4.13) e concluímos o potencial do *inflaton* no *frame* de Einstein:

$$V(\phi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{4} 3M^2 \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \right) \right]^2. \quad (4.20)$$

Figura 8 – Potencial de Starobinsky no *frame* de Einstein *versus* campo escalar em unidades de massa de Planck.



Fonte: Autora

4.4 Dinâmica de *slow-roll*

A dinâmica de *slow-roll* é fundamentada em dois parâmetros obtidos na Eq. (3.28). Nesta seção, iremos escrevê-los em sua forma relacionada ao potencial inflacionário. Assim, com o potencial, podemos determinar sob quais condições este modelo leva à inflação. Sabemos que o parâmetro de *slow-roll* $\varepsilon_V(\phi)$ tem a forma apresentada na Eq. (3.27). Desse modo, utilizamos a Eq. (4.20) e usamos a condição $\varepsilon \ll 1$ para que o regime esteja na inflação. Assim, inicialmente calculamos a derivada do potencial em relação ao campo escalar ϕ

$$V' = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{4} \frac{2}{M_{\text{Pl}}} \sqrt{\frac{2}{3}} 3M^2 \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) \right]^1 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right), \quad (4.21)$$

onde $V' \equiv dV/d\phi$. Substituímos em (3.27):

$$\varepsilon_V(\phi) = \frac{4}{3} \left\{ \frac{\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)}{\left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)\right]} \right\}^2.$$

Reorganizamos esta fração:

$$\boxed{\varepsilon_V(\phi) = \frac{4}{3} \frac{1}{\left[\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) - 1\right]^2}}. \quad (4.22)$$

Aplicamos a condição de *slow-roll* $\varepsilon \ll 1$ no resultado acima:

$$\frac{4}{3} \ll \left[\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) - 1 \right]^2$$

e encontramos:

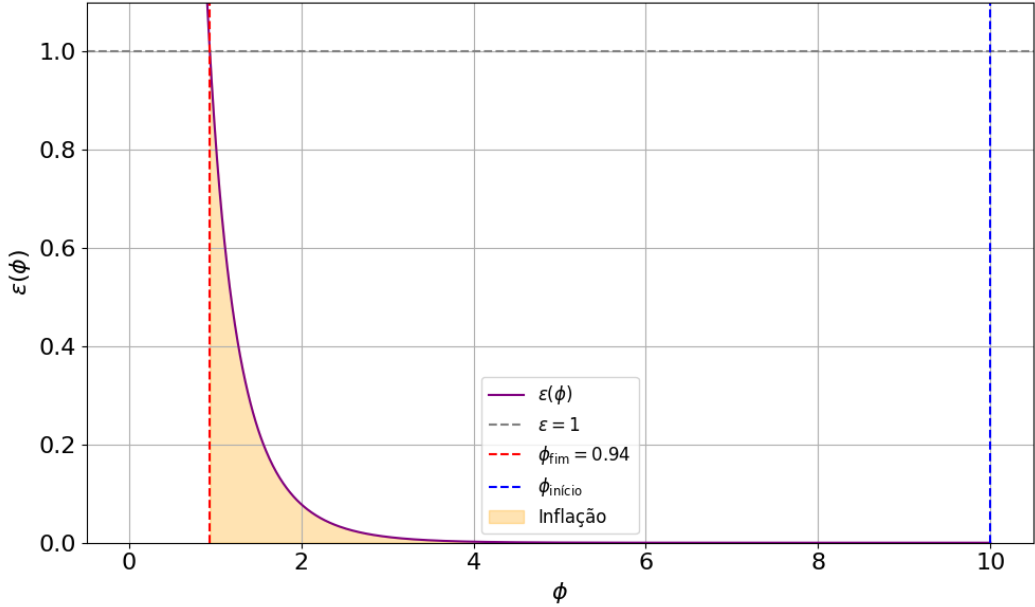
$$\phi \gg \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} + 1 \right] M_{\text{Pl}}.$$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos aproximadamente $\phi \gg 0,94M_{\text{Pl}}$ e sob esta condição o parâmetro de *slow-roll* $\varepsilon_V(\phi)$ atinge a inflação dado o modelo de Starobinsky. De acordo com a Eq. (4.20), sabemos que no limite $\phi \rightarrow \infty$, o potencial

$V(\phi)$ tende a um valor constante, ou seja, $V(\phi) \rightarrow \frac{M_{\text{Pl}}^2}{4} 3M^2$, como ilustrado na Fig. 8, onde se observa o platô da curva. Portanto, a inflação ocorre quando $\phi \gg M_{\text{Pl}}$, o que caracteriza o modelo de Starobinsky como um modelo de *large-field*.

Na Fig. 9 vemos o comportamento da Eq. (4.22). Para $\phi > 0,94M_{\text{Pl}}$ acontece a passagem de $\varepsilon < 1$. Conforme $\phi \gg 0,94M_{\text{Pl}}$, temos $\varepsilon \ll 1$, o que satisfaz a condição de *slow-roll*. Visualmente, isso aparece como a região constante no gráfico no entorno do zero, sinalizando a fase de inflação quase exponencial. A inflação ocorre aproximadamente entre as linhas tracejadas verticais.

Figura 9 – Parâmetro *slow-roll* $\varepsilon_V(\phi)$ com região inflacionária destacada



Fonte: Autora

Ademais, para calcular o parâmetro η vamos escrever o potencial (4.20) em termos de $\alpha = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{3M^2}$, uma constante que está vinculada à escala de energia M^2 (Baumann, 2022), veja

$$V = \frac{M_{\text{Pl}}^4}{4\alpha} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) \right]^2. \quad (4.23)$$

A primeira derivada de V com respeito à ϕ foi encontrada em (4.21). A sua segunda derivada vale:

$$V'' = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{3\alpha} \left[2 \exp\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) \right].$$

A seguir, avaliamos o parâmetro η_V que garante que a inflação dure tempo o

suficiente para a inflação resolver os problemas da cosmologia padrão com a Eq. (3.28):

$$\eta_V(\phi) = -\frac{4}{3} \exp\left(-\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \left[-2 \exp\left(-\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 1\right] \left[1 - \exp\left(-\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right]^{-2}$$

logo

$$\eta_V(\phi) = -\frac{4}{3} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) \frac{\left[1 - 2 \frac{1}{\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)}\right]}{\left[1 - \frac{1}{\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)}\right]^2}. \quad (4.24)$$

Note que na condição $\phi \gg M_{\text{Pl}}$ teremos

$$\eta_V \approx -\frac{4}{3} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right). \quad (4.25)$$

No limite inferior de $\phi \gg 0,94M_{\text{Pl}}$, escrevemos $\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} = 0,94$ e substituímos na expressão acima, obtendo o valor

$$|\eta_V| \approx 0,61.$$

Este resultado é menor do que 1 e sugere que a inflação ocorre eficazmente (Starobinsky, 1980; Baumann, 2012; Dodelson, 2003; Liddle; Lyth, 2000).

A manipulação vindoura será conveniente na Seção 4.5.1. Colocamos ε_V em função de η_V quando analisamos o regime $\phi \gg M_{\text{Pl}}$. Nesta circunstância, a exponencial no denominador da Eq. (4.22) é muito maior que 1, e por isso temos

$$\varepsilon_V(\phi) \approx \frac{4}{3} \exp\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right). \quad (4.26)$$

Quando analisamos a Eq. (4.25), notamos a relação

$$\varepsilon_V \approx \frac{3}{4} \eta_V^2. \quad (4.27)$$

Tanto no modelo de Starobinsky, que será descrito no Capítulo 4, quanto nas extensões desse modelo, os parâmetros ε e η são tratados com mesma hierarquia. Essa relação (4.27) mostra que quem domina as observações é o parâmetro η_V .³³

³³A relação (4.27) mostra que o parâmetro de *slow-roll* ε_V é proporcional ao quadrado de η_V , sendo, portanto, um termo de segunda ordem. Isso implica que, ao incluir ε_V em uma análise (por exemplo,

4.5 Parâmetros Cosmológicos

Os parâmetros cosmológicos descrevem quantitativamente as propriedades fundamentais do Universo em larga escala. Eles determinam, por exemplo, a sua composição, geometria, taxa de expansão e evolução temporal. Através da confrontação de modelos teóricos com observações — como a radiação cósmica de fundo, a distribuição de galáxias e as supernovas do tipo Ia — é possível restringir esses parâmetros e testar cenários cosmológicos. Entre os principais estão o parâmetro de Hubble, a densidade de energia de diferentes componentes (matéria, radiação, energia escura), o índice espectral escalar n_s e a razão tensor-escalar, os quais desempenham papel central na caracterização do Universo primordial e na avaliação de modelos inflacionários.

4.5.1 Tilt escalar n_s

Nesta última seção do capítulo, faremos a conexão dos parâmetros de *slow-roll* com os parâmetros cosmológicos que ligam a teoria à realidade observacional, através do *tilt* escalar n_s e da razão tensorial-escalar r , escritas em função do número de referência N_* observado na RCF. Inicialmente lembramos da Eq. (3.29), que podemos escrever em função do número de onda k_* referência, confira:

$$N_* = \int_{\phi_e}^{\phi_*} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_V} M_{\text{Pl}}} |d\phi| \quad (4.28)$$

onde $\phi_* \equiv \phi(t_*)$ corresponde a forma do potencial do *inflaton* no tempo t_* - sendo este o momento do cruzamento do horizonte da flutuação referência λ_* , com número de onda $k_* = (aH)_*$. Há dois momentos em que as flutuações do *inflaton* cruzam o horizonte de Hubble (Baumann, 2022):

- Quando a flutuação λ_* sai do horizonte causal, indo para um regime super-horizonte, ainda enquanto há inflação;

no cálculo do índice espectral n_s ou da razão de tensor-escalar r é necessário estender a expansão até a segunda ordem em η_V para manter a consistência. Ignorar termos de segunda ordem em η_V enquanto se inclui ε_V levaria a resultados inconsistentes, já que ambos contribuem de forma comparável.

- Após o final da inflação ϕ_e , quando a flutuação eventualmente volta para sub-horizonte.

As maiores flutuações observáveis são sondadas na RCF e saem do horizonte nos primeiros momentos da inflação e além disso, sabemos que a RCF acontece em $\phi_* \gg \phi_e$, fato observado na Fig. 5 (Baumann, 2022).

Calculamos o número de *e-folds* aplicando o intervalo de integração desde o final da inflação até o nosso ponto de referência, conforme visto na Eq. (4.28). Então, substituímos a Eq. (4.26) na Eq. (4.28)

$$N_* = \int_{\phi_e}^{\phi_*} \frac{d\phi}{M_{Pl}} \frac{1}{\sqrt{2^{\frac{4}{3}} \left[\exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^{-2} \right]}} = \frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{3}{8}} \left[\frac{\exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)}{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{M_{Pl}}} \right] \Bigg|_{\phi_e}^{\phi_*}$$

colocamos a constante em evidência e aplicamos dos limites de integração:

$$N_* = \frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{\frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{2}{3}}} \left[\exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \right] \Bigg|_{\phi_e}^{\phi_*} = \sqrt{\frac{9}{16}} \left[\exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_*}{M_{Pl}} \right) - \exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_e}{M_{Pl}} \right) \right]. \quad (4.29)$$

Para prosseguir, precisamos calcular ϕ_e e obtemos este resultado quando impomos $\varepsilon_V = 1$ na Eq. (4.26)

$$1 = \frac{4}{3} \exp \left(-2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_e}{M_{Pl}} \right)$$

então

$$\boxed{\frac{\phi_e}{M_{Pl}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{3}{4} \right)}. \quad (4.30)$$

Agora substituímos (4.30) em (4.29)

$$N_* = \frac{3}{4} \left\{ \exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_*}{M_{Pl}} \right) - \exp \left[\ln \left(\frac{3}{4} \right)^{-1/2} \right] \right\} = \frac{3}{4} \exp \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_*}{M_{Pl}} \right) - \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Assumindo que $\phi_* \gg M_{\text{Pl}}$, concluímos

$$\boxed{N_* = \frac{3}{4} \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_*}{M_{\text{Pl}}}\right)}. \quad (4.31)$$

Com a Eq. (4.25) fazemos

$$\frac{1}{\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)} = -\frac{3}{4}\eta_V \rightarrow -\frac{4}{3}\eta_V^{-1} = \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)$$

daí substituímos na Eq. (4.31):

$$N_* = -\eta_V^{-1}.$$

Ou seja,

$$\eta_V = -\frac{1}{N_*}. \quad (4.32)$$

Substituindo o resultado acima na Eq. (4.27), temos

$$\boxed{\varepsilon_{V,*} \approx \frac{3}{4} \frac{1}{N_*^2}}. \quad (4.33)$$

O *tilt* escalar é definido como

$$n_s \equiv 1 - 6\varepsilon_{V,*} + 2\eta_{V,*}$$

e fazemos as respectivas substituições das Eqs. (4.33) e (4.32):

$$n_s - 1 \approx 2\left(-\frac{1}{N_*}\right) - 6\left(\frac{3}{4} \frac{1}{N_*^2}\right) \approx -\frac{2}{N_*} - \frac{18}{4} \frac{1}{N_*^2}.$$

Nota-se que $N_*^2 \gg N_*$, já que $N_* \sim 50$, por isso concluímos

$$\boxed{n_s - 1 \approx -\frac{2}{N_*}}. \quad (4.34)$$

Substituindo $N_* \approx 50$, temos $n_s \approx 0,96$. Este resultado obedece o valor obtido na Ref. (Planck Collaboration, 2018).

No contexto inflacionário, a razão tensorial-escalar r é essencial para descrição da relação entre as amplitudes das perturbações primordiais escalares A_s e as tensoriais A_t .

Este parâmetro mostra sua relevância no teste de modelos inflacionários e os dados da RCF obtidos pelo satélite Planck e dos experimentos feitos pelo BICEP/Keck (Ade *et al.*, 2021) buscam restringir este parâmetro. Ademais, as restrições observacionais na amplitude tensorial são geralmente expressas em termos de r .

Então, para o modelo de Starobinsky também calculamos qual seria o valor esperado nas observações. Com as Eqs. (4.27) e (4.32), a substituição em $r = 16\varepsilon_{V,*}$ resultará em

$$r = 16 \left(\frac{3}{4} \eta_V^2 \right) = 16 \left[\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{N_*} \right)^2 \right],$$

portanto

$$\boxed{r = \frac{12}{N_*^2}}. \quad (4.35)$$

Os resultados (4.34) e (4.35) foram obtidos no Capítulo 8 da Ref. (Baumann, 2022). Se substituirmos $N_* \sim 50$, temos

$$r \sim 0,0048,$$

que respeita o limite superior de $r < 0.036$ obtido nos dados (Ade *et al.*, 2021) e confirma que o modelo de Starobinsky segue sendo um candidato para explicação do que aconteceu no Universo primordial.

4.5.2 Amplitude escalar

Um passo a mais para conexão com as observações cosmológicas é mostrar que a normalização da amplitude escalar $A_s \approx 2 \times 10^{-9}$ requer que $\alpha \approx 2 \times 10^9$ (Baumann, 2022). Sabemos que a amplitude da flutuação escalar é definida como³⁴

$$A_s \equiv \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon_*} \frac{H_*^2}{M_{\text{Pl}}^2}.$$

Queremos deixar a amplitude escrita em termos do potencial. Assim, conhecendo o vínculo entre o parâmetro de Hubble e V através da aproximação de *slow-roll*, $H^2 \approx \frac{V}{3M_{\text{Pl}}^2}$, escrevemos

$$A_s = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\varepsilon_*} \frac{V_*}{3M_{\text{Pl}}^4}$$

³⁴Segundo a Eq. (8.98) da Ref. (Baumann, 2022).

portanto

$$A_s = \frac{1}{24\pi^2} \frac{1}{\varepsilon_{V,*}} \frac{V_*}{M_{Pl}^4}. \quad (4.36)$$

Além disso, queremos determinar α que envolve a Eq. (4.23) escrita em função do número de ondas de referência k_* , então fazemos

$$V_* = \frac{M_{Pl}^4}{4\alpha} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_*}{M_{Pl}}\right) \right]^2. \quad (4.37)$$

Desse modo, conhecendo a Eq. (4.31) isolamos $\frac{\phi_*}{M_{Pl}}$ em termos de N_* :

$$\frac{\phi_*}{M_{Pl}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln\left(\frac{4}{3} N_*\right)$$

e fazemos a substituição no potencial da Eq. (4.37)

$$V_* = \frac{M_{Pl}^4}{4\alpha} \left[1 - \left(\frac{4}{3} N_*\right)^{-1} \right]^2,$$

ou seja

$$V_* = \frac{M_{Pl}^4}{4\alpha} - \frac{3M_{Pl}^4}{8\alpha N_*} + \frac{M_{Pl}^4}{4\alpha} \frac{9}{16N_*^2}.$$

Substituímos o resultado acima na Eq. (4.36) juntamente com o resultado fornecido na Eq. (4.33) e obtemos

$$A_s = \frac{1}{24\pi^2} \left(\frac{4}{3} N_*^2 \frac{1}{M_{Pl}^4}\right) \left(\frac{M_{Pl}^4}{4\alpha} - \frac{3M_{Pl}^4}{8\alpha N_*} + \frac{M_{Pl}^4}{4\alpha} \frac{9}{16N_*^2}\right)$$

isto é

$$A_s = \frac{1}{\pi^2\alpha} \left(N_*^2 \frac{1}{72} - \frac{1}{48} N_* + \frac{1}{128}\right).$$

Por conseguinte, aplicamos $N_* \sim 50$ e $A_s = 2 \times 10^{-9}$:

$$\alpha \sim 1,70 \times 10^9.$$

Logo, concluímos que o fator de correção no modelo de Starobinsky é aproximadamente

$$\alpha \sim 2 \times 10^9. \quad (4.38)$$

Na próxima seção, analisamos como o potencial se modifica com a variação desse fator.

4.6 Motivação para incluir o termo R^3

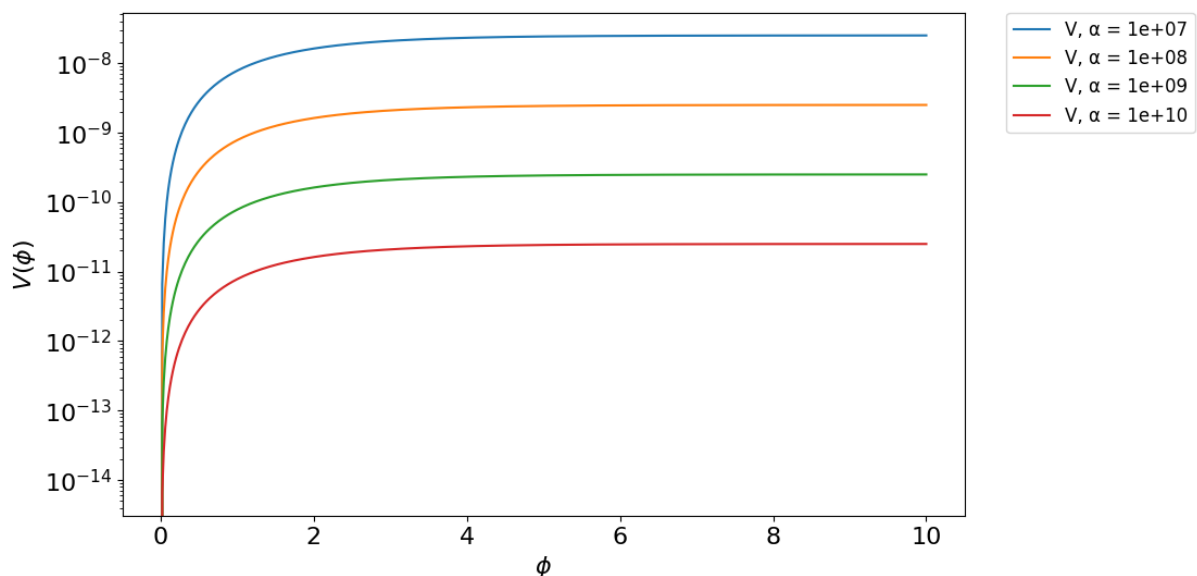
Quando escrevemos a ação de Starobinsky como

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{\alpha}{2M_{\text{Pl}}^2} R^2 \right)$$

e seguimos o maquinário apresentado na Subseção 4.3, obtemos a Eq. (4.23) para o potencial, que por sua vez é inversamente proporcional ao α . Na Fig. 10 notamos esse comportamento explicitamente.

A Fig. 10 mostra o potencial de Starobinsky para diferentes valores de α , onde o potencial tende a um platô constante em ϕ grandes, essencial para sustentar uma fase prolongada de inflação com $\varepsilon \ll 1$, e decai para valores de ϕ próximos de zero. Como $V(\phi) \propto 1/\alpha$, a energia da inflação torna-se menor para α maiores. O valor favorecido pelas observações corresponde a curva verde da Fig. 10, está associado a $\alpha = 2 \times 10^9$ e leva ao dilema com a conjectura do *swampland*, que será discutida mais adiante.

Figura 10 – Gráfico ilustrando a dinâmica simultânea do comportamento do potencial de Starobinsky, conforme evolução do campo ϕ e do parâmetro ε_V para diferentes α



Fonte: Autora

A compreensão da origem do universo e sua evolução inicial exige que o modelo

inflacionário seja compatível com uma descrição fundamental da gravidade em escalas ultraenergéticas. A inflação, embora tenha alcançado grande sucesso ao resolver problemas clássicos da cosmologia padrão e tenha fornecido previsões observacionais em excelente concordância com os dados atuais (Planck Collaboration, 2018), não deve ser encarada como um mecanismo isolado. Pelo contrário, espera-se que a fase inflacionária emergja de forma natural como um limite de baixas energias³⁵ de uma teoria mais fundamental, capaz de descrever o comportamento do espaço-tempo nas proximidades da escala de Planck (Baumann, 2012; Kallosh; Linde; Yamada, 2020). Entre as candidatas a essa teoria está a teoria das cordas, que visa unificar a gravidade com as demais interações fundamentais e oferecer uma descrição consistente do regime pré-inflacionário (Vafa, 2006).

Essa conexão entre gravidade quântica e inflação não é apenas desejável, mas necessária, a fim de evitar cenários artificiais ou teoricamente inconsistentes. A coerência dessa transição entre regimes teóricos é o cerne do chamado *Swampland Program* (Hiroshi *et al.*, 2019; Vafa, 2006), que impõe condições de consistência a modelos efetivos de campo deriváveis de teorias de gravidade quântica. Entre essas condições, destacam-se a proibição de deslocamentos *transplanckianos* do campo *inflaton*, bem como a restrição a potenciais excessivamente planos (como os vistos com α cada vez maiores, na Fig. 10), que não poderiam emergir de um cenário fundamental. Dessa forma, a inflação deve ser interpretada como parte de uma narrativa cosmológica contínua, na qual a fase inicial do universo, dominada por efeitos de gravidade quântica, evolui suavemente para o regime inflacionário e, subsequentemente, para a fase de radiação (Baumann; McAllister, 2015). Qualquer modelo inflacionário consistente deve, portanto, estar inserido nesse arcabouço teórico mais abrangente, respeitando os critérios de consistência oriundos da física fundamental.

O modelo de Starobinsky é amplamente reconhecido por sua concordância com observações cosmológicas, especialmente no que tange às previsões para o índice espectral n_s e a razão tensorial-escalar r (Starobinsky, 1980). Além disso, ele estabelece um elo sólido entre gravidade modificada e cenários inflacionários. No entanto, a dinâmica inflacionária associada ao modelo implica que o campo *inflaton* ϕ atinge valores *transplanckianos*, caracterizando o modelo como um cenário de *large-field inflation*, conforme ilustrado na Fig. 10.

³⁵O regime de baixas energias significa abaixo da escala de Planck.

Embora o modelo de Starobinsky apresente uma razão tensor-escalar pequena — com $r \approx 12/N^2$, resultando em $r \sim 0,0048$ para $N = 50$ e $r \sim 0,0033$ para $N = 60$ — ele é classificado como um modelo *large-field*, como já discutido. Isso contrasta com a classificação sugerida pela fórmula de Lyth³⁶, segundo a qual modelos com $r \geq 0,01$ correspondem a deslocamentos *transplanckianos* do campo *inflaton* e, portanto, ao regime *large-field* (Baumann, 2012; Lyth, 1997). Os valores de r no modelo de Starobinsky não satisfazem esse critério, mas ainda assim o modelo exibe um deslocamento *transplanckiano* do *inflaton*. Isso reflete uma limitação da fórmula de Lyth, que oferece apenas uma estimativa aproximada e não se aplica de forma estrita a todos os modelos — especialmente àqueles com potenciais do tipo platô, como o de Starobinsky (Baumann, 2012; Lyth, 1997; Martin; Ringeval; Vennin, 2014). Conforme apontado pela colaboração BICEP/KECK (CMB-S4 Collaboration, 2020), a distinção entre *small-field* e *large-field* deve priorizar o deslocamento total do *inflaton* $\Delta\phi$, ao invés de depender exclusivamente do valor de r . Há, afinal, modelos nos quais $\Delta\phi \gg M_{\text{Pl}}$, mesmo com $r < 0,010$.

Isso gera um conflito conceitual com os critérios de consistência estabelecidos pela *Swampland Conjecture* (Obied *et al.*, 2018; Palti, 2019), que, inspirada na teoria das cordas, sugere que modelos efetivos compatíveis com gravidade quântica devem evitar deslocamentos *transplanckianos* e potenciais demasiadamente planos. Assim, apesar de seu sucesso fenomenológico, o modelo de Starobinsky puro pode ser classificado como pertencente ao *swampland*, por não satisfazer os critérios de consistência exigidos por uma unificação entre teoria de campos e gravidade quântica; caso contrário, ele pertenceria ao *landscape*.

Essa limitação teórica motiva a introdução de correções adicionais à ação gravitacional, em particular termos cúbicos no escalar de Ricci (e.g., R^3), cuja presença pode suavizar as condições de *large-field* (Sotiriou; Faraoni, 2010; De Felice; Tsujikawa, 2010). Tais modificações alteram a estrutura do potencial efetivo, tornando-o compatível com regimes de alta energia típicos da inflação primordial (Starobinsky, 1980). Além disso, essa abordagem permite uma conexão mais natural entre a física inflacionária e as exigências teóricas oriundas da teoria das cordas, onde correções de ordem superior à gravidade surgem naturalmente em expansões do tipo α' (Becker; Becker; Schwarz, 2007; Kallosh; Linde, 2013).

³⁶A fórmula configura-se como $\frac{\Delta\phi}{M_{\text{Pl}}} \approx \sqrt{\frac{r}{0,01}} \times \mathcal{O}(1)$. (Baumann, 2012; Lyth, 1997).

A inclusão de um termo cúbico no escalar de Ricci, ou seja, um termo proporcional a R^3 na ação gravitacional, surge como um passo natural na busca por extensões do modelo de Starobinsky. Ao interpretar o modelo de Starobinsky como uma expansão em potências do escalar de Ricci, o próximo termo esperado, por simetria e naturalidade, é justamente o termo cúbico. Em outras palavras, o modelo de Starobinsky pode ser encarado como a primeira aproximação de uma série de correções que emergiriam de uma teoria gravitacional mais fundamental — potencialmente derivada da gravidade quântica ou de teorias de cordas (Baumann; McAllister, 2015; Kallosh; Linde; Yamada, 2020).

Além disso, a Ref. (Saini; Nautiyal, 2025) reforça que a adição do termo cúbico é justificada não apenas como uma extensão teórica natural, mas também por seu potencial em melhorar o ajuste às observações de n_s e r , explorando regiões do espaço de parâmetros que o termo puramente quadrático não alcança. Por fim, a presença de termos de ordem superior no escalar de Ricci também está relacionada à possibilidade de gerar correções significativas à forma do potencial inflacionário efetivo, contribuindo para resolver tensões entre previsões teóricas e limites experimentais cada vez mais precisos (Lyth, 1997; Planck Collaboration, 2018). Dessa forma, o termo R^3 representa a primeira e mais simples modificação sistemática a ser considerada na tentativa de aproximar o modelo inflacionário de Starobinsky de um cenário completo e fundamentado no contexto da gravidade quântica.

Com todas as razões apresentadas acima, faz sentido adicionar R^3 na ação de Starobinsky e é isso o que faremos no próximo capítulo.

5 ADICIONANDO R^3 NA AÇÃO DE STAROBINSKY

Neste capítulo, trabalhamos com a generalização da inflação de Starobinsky devido à inclusão do termo cúbico do escalar de curvatura na ação gravitacional. Dito isso, escrevemos

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad \text{onde } f(R) \equiv R + \frac{1}{6M^2} R^2 + \frac{\alpha_0}{27M^4} R^3, \quad (5.1)$$

onde α_0 é um parâmetro adimensional. Iremos seguir passos análogos feitos no Capítulo 4. Assim, aplicamos o método de multiplicador de Lagrange na ação acima e obtemos

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + (R - \chi) f_{,\chi}], \quad (5.2)$$

onde $f_{,\chi} \equiv \frac{\partial f}{\partial \chi}$. Demostramos adiante sob qual condição ela retorna à Eq. (5.1). Essa ação reduz-se à ação de Starobinsky quando o último termo da Eq. (5.1) é eliminado, e calculamos a variação da Eq. (5.2) em relação ao campo auxiliar χ . Como estamos seguindo uma técnica já apresentada, sabemos que chegaremos à etapa da aplicação do PMA, $\delta S = 0$. Por isso, eventualmente, com a variação da ação e o conhecimento de que $\delta\chi \neq 0$ em um hipervolume, temos

$$(R - \chi) \frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} (R - \chi) = 0 \\ \frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} = 0 \end{cases}.$$

Fazendo $R = \chi$ na $f(R)$ apresentada na Eq. (5.1), vemos

$$\frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\chi + \frac{1}{6M^2} \chi^2 + \frac{\alpha_0}{27M^4} \chi^3 \right) = 1 + \frac{\chi}{3M^2} + \frac{\alpha_0}{27M^4} 3\chi^2$$

daí

$$\frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} = 1 + \frac{\chi}{3M^2} + \frac{\alpha_0}{9M^4} \chi^2.$$

A segunda derivada será

$$\frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} = \frac{1}{3M^2} + \frac{\alpha_0}{9M^4} 2\chi.$$

Aplicando a condição $\frac{\partial^2 f(\chi)}{\partial \chi^2} = 0$ vemos

$$\chi = -\frac{3M^2}{2\alpha_0}.$$

Este resultado impõe que o campo χ é uma constante, o que restringe o modelo e por isso abandonamos essa possibilidade. Desta forma, adotamos a condição $R - \chi = 0$, logo

$$\boxed{R = \chi}.$$

Já que obtivemos a mesma condição que encontramos na Subseção 4.1, será possível escrever o potencial $U(\varphi)$ em termos de φ , que compõe a ação, sendo

$$U(\varphi) \equiv \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} [\varphi \chi(\varphi) - f(\chi(\varphi))], \quad (5.3)$$

mas agora $f(\chi)$ assume a forma da Eq. (5.1). Logo, a ação de $f(R)$ no *frame* de Jordan, em que φ acopla-se não minimamente com R na integral de ação, escrita em termos do potencial, que será

$$\boxed{S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \varphi R - U(\varphi) \right]}. \quad (5.4)$$

Podemos calcular quem é $\varphi \equiv f_{,\chi} = \frac{\partial f}{\partial \chi}$

$$\varphi = \frac{\partial f(R)}{\partial \chi} = \frac{\partial f(\chi)}{\partial \chi} = 1 + \frac{\chi}{3M^2} + \frac{\alpha_0}{9M^4} \chi^2. \quad (5.5)$$

Agora, precisamos identificar quem é χ , por isso é preciso resolver a seguinte equação de segundo grau

$$\frac{\alpha_0}{9M^4} \chi^2 + \frac{\chi}{3M^2} + 1 - \varphi = 0.$$

Invertendo a Eq. (5.5) para obter χ em função de φ , temos:

$$\chi = \frac{3M^2}{2\alpha_0} \left[-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right]. \quad (5.6)$$

Para que o argumento da raiz não seja negativo (evitando, assim, um χ complexo) devemos ter

$$1 - 4\alpha_0(1 - \varphi) \geq 0$$

ou seja,

$$\varphi \geq 1 - \frac{1}{4\alpha_0}.$$

O resultado acima é correto quando $\alpha_0 \geq 0$, pois, dessa forma, há a garantia de que existirá estabilidade do modelo gravitacional durante todo o regime inflacionário. Essa argumentação está vinculada com o fato de que os modelos $f(R)$ são estáveis sempre que $f'(R) > 0$ e $f''(R) \geq 0$ (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022; Sotiriou; Faraoni, 2010).³⁷

Obtemos uma pequena correção em R^3 quando α_0 é também pequeno. Nessas condições, a desigualdade nos diz que φ precisa ser maior ou igual a um número negativo muito grande, e isso é facilmente satisfeito, tornando o modelo razoável. Dessa forma, precisamos estudar qual é o sinal adequado em (5.6). Para isso, estudamos o limite $\alpha_0 \rightarrow 0$ que deve recuperar o modelo de Starobinsky. Para α_0 pequeno:

$$\sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \approx 1 - 2\alpha_0(1 - \varphi). \quad (5.7)$$

Assim, temos:

$$\chi \approx -\frac{3M^2}{2\alpha_0} \pm \frac{3M^2}{2\alpha_0} [1 - 2\alpha_0(1 - \varphi)].$$

³⁷A implicação $\alpha_0 \geq 0$ surge das condições de estabilidade para modelos $f(R)$, que exigem $f'(R) > 0$ e $f''(R) \geq 0$ para evitar instabilidades físicas, como modos fantasmas ou instabilidades de Dolgov-Kawasaki. No modelo

$$f(R) = R + \frac{1}{2\kappa_0}R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2}R^3,$$

a primeira derivada com respeito ao argumento

$$f'(R) = 1 + \frac{1}{\kappa_0}R + \frac{\alpha_0}{\kappa_0^2}R^2$$

deve ser positiva, o que requer $\kappa_0 > 0$ para garantir que o termo $\frac{1}{\kappa_0}R$ não torne $f'(R)$ negativo. Além disso, a segunda derivada

$$f''(R) = \frac{1}{\kappa_0} + \frac{2\alpha_0}{\kappa_0^2}R$$

deve ser não negativa, o que, durante o regime inflacionário [$R \approx 6V(\varphi)$ e $V(\varphi) > 0$], implica

$$1 + \frac{12\alpha_0}{\kappa_0}V(\varphi) \geq 0.$$

Para garantir que essa desigualdade seja satisfeita para qualquer valor de $V(\chi)$, é necessário que $\alpha_0 \geq 0$. Assim, $\kappa_0 > 0$ e $\alpha_0 \geq 0$ são condições fundamentais para assegurar a estabilidade e consistência física do modelo $f(R)$ durante a inflação, evitando modos fantasmas e instabilidades de Dolgov-Kawasaki (Capozziello; De Laurentis, 2011; Carroll *et al.*, 2004; Dolgov; Kawasaki, 2003; Faraoni, 2005; Sotiriou; Faraoni, 2010; Woodard, 2007).

Analisamos as duas possibilidades

$$\begin{cases} \chi = -\frac{3M^2}{2\alpha_0} + \frac{3M^2}{2\alpha_0} - 3M^2(1-\varphi) & , \text{ para o sinal } + \\ \chi = -\frac{3M^2}{2\alpha_0} - \frac{3M^2}{2\alpha_0} + 3M^2(1-\varphi) & , \text{ para o sinal } - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \chi = -3M^2(1-\varphi) \\ \chi = -\frac{3M^2}{\alpha_0} + 3M^2(1-\varphi) \end{cases} .$$

O limite de Starobinsky é atingido quando estudamos o caso do sinal positivo, pois sabemos que para R^2 o resultado é

$$\chi = (\varphi - 1) 3M^2.$$

Logo, para R^3 o campo auxiliar χ será

$$\boxed{\chi = \frac{3M^2}{2\alpha_0} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right]} . \quad (5.8)$$

Fazendo $R = \chi$ em $f(R)$, dado na Eq. (5.1), temos:

$$f(\chi) \equiv \chi + \frac{1}{6M^2}\chi^2 + \frac{\alpha_0}{27M^4}\chi^3 . \quad (5.9)$$

Substituindo as Eqs. (5.8) e (5.9) na Eq. (5.3), vemos:

$$U(\varphi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left\{ \varphi \frac{3M^2}{2\alpha_0} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right] - \frac{3M^2}{2\alpha_0} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right] - \frac{1}{6M^2} \left[\frac{3M^2}{2\alpha_0} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right] \right]^2 - \frac{\alpha_0}{27M^4} \left[\frac{3M^2}{2\alpha_0} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right] \right]^3 \right\} .$$

Manipulamos algebricamente e concluímos

$$U(\varphi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2 M^2}{2} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right] \left\{ 3(\varphi - 1) - \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right] \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0} \sqrt{1 - 4\alpha_0(1-\varphi)} \right] \right\} . \quad (5.10)$$

Certificamos-nos de que calculamos o potencial corretamente quando aplicamos o limite em que $\alpha_0 \rightarrow 0$, e este potencial retorna ao potencial no *frame* de Jordan de Starobinsky. Com o resultado da Eq. (5.7), substituímos na Eq. (5.10) e obtemos

$$U(\varphi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} (\varphi - 1) M^2 \left\{ 3(\varphi - 1) - \frac{3}{2}(\varphi - 1) - (\varphi - 1) \alpha_0 (\varphi - 1) \right\} .$$

Já que $\alpha_0 = 0$ para Starobinsky, vemos

$$U(\varphi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} M^2 \frac{3}{2} (\varphi - 1)^2$$

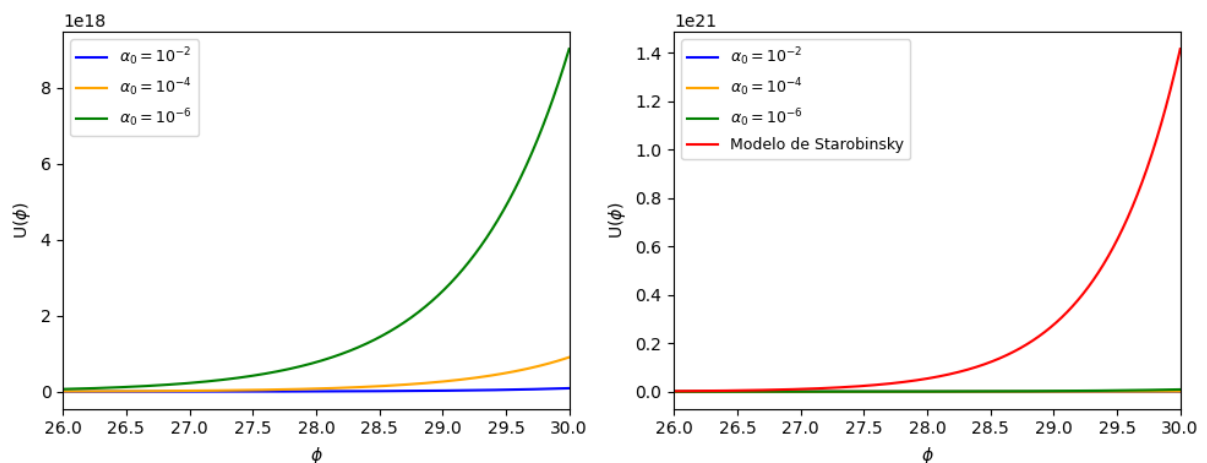
como esperado. Portanto, nosso potencial no frame de Jordan será a Eq. (5.10).

Para comparação, na Fig. 11, analisamos o comportamento do potencial $U(\varphi)$ do modelo de Starobinsky e o potencial do modelo que adiciona o termo R^3 variando α_0 em três valores: $\alpha_0 = 10^{-2}, 10^{-4}$ e $\alpha_0 = 10^{-6}$. Esses valores foram escolhidos por serem os mesmos utilizados no artigo (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022).

No lado esquerdo da Fig. 11, é apresentado o comportamento do potencial do modelo abordado neste capítulo. Notamos que, em $\alpha_0 = 10^{-2}$, o comportamento da curva tende a uma constante na escala usada, e as outras duas curvas apresentam um comportamento crescente, em $\alpha_0 = 10^{-4}$, de maneira mais sutil do que em $\alpha_0 = 10^{-6}$. Isso nos sugere como deverá ser o formato do potencial quando passarmos para o *frame* de Einstein.

No lado direito da Fig. 11, adicionamos a curva de Starobinsky junto com as outras curvas e o comportamento deste modelo domina, pois a separação entre as curvas com diferentes α_0 quase não aparece já que há a sobreposição de todas elas, enquanto a curva exponencial de Starobinsky fica predominante.

Figura 11 – Potenciais no *frame* de Jordan para os dois modelos inflacionários em função dos valores assumidos pelo campo escalar em unidades de massa de Planck. No lado esquerdo temos as curvas do potencial $U(\varphi)$ para o modelo $R + R^2 + R^3$ da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022) variando α_0 em $10^{-2}, 10^{-4}$ e 10^{-6} com as cores azul, laranja e verde, respectivamente. Na direita, temos as mesmas curvas com a adição da curva do modelo de Starobinsky, onde $\alpha_0 = 0$ e está na cor vermelha.



Fonte: Autora

5.1 *Frame* de Einstein

Nesta seção, iremos aplicar a transformação conforme para conseguir obter o potencial V deste modelo. Então, com a mesma transformação conforme utilizada na Subseção 4.3, temos o escalar de Ricci escrito como (4.10)

$$R = \Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \right),$$

onde $\omega \equiv \ln \Omega$. Para encontrarmos o potencial $V(\phi)$ do modelo $R + R^2 + R^3$ no *frame* de Einstein todos os passos serão análogos, a menos da etapa onde temos a substituição de U em V . Lembrando da definição (4.13)

$$V \equiv \frac{U}{\varphi^2}$$

onde

$$\boxed{\varphi = \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)} \quad (5.11)$$

fazemos

$$V = U \left[\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) \right]^{-2}$$

sendo U a Eq. (5.10). Antes de substituirmos U , aplicamos a propriedade distributiva no termo fora da chaves, veja

$$U(\varphi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2 M^2}{2 \cdot 2\alpha_0} \left\{ 3(\varphi - 1) \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] - \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right]^2 \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0} \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \right\}.$$

Desta forma,

$$V(\varphi) = \frac{M_{\text{Pl}}^2 M^2}{2 \cdot 2\alpha_0} \varphi^{-2} \left\{ 3(\varphi - 1) \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] - \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right]^2 \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0} \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \right\}.$$

Substituimos a Eq. (5.11) no resultado acima para deixarmos tudo em função do

campo *inflaton* ϕ . Portanto, concluímos

$$\begin{aligned}
V(\phi) = & \frac{M_{\text{Pl}}^2 M^2}{2 \cdot 2\alpha_0} \left\{ 3 \left[\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) - 1 \right] \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 \left(1 - \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)\right)} \right] \right. \\
& - \left. \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 \left(1 - \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)\right)} \right]^2 \right. \\
& \times \left. \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0} \sqrt{1 - 4\alpha_0 \left(1 - \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right)\right)} \right] \right\} \\
& \times \exp\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right). \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Pretendemos que a Eq. (5.12) fique no seguinte formato:

$$\boxed{V = 3M^2 \frac{1}{e^{2\Phi}} \zeta \left(e^\Phi - 1 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{\alpha_0}{3}\zeta^2 \right)}, \tag{5.13}$$

Esta é a forma que aparece no artigo (Cuzinato; Medeiros, 2024), e temos o interesse de confirmar se a Eq. (5.12) está correta. Para isso, fazemos as definições

$$\Phi \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \quad \text{e} \quad \zeta \equiv \frac{\chi}{3M^2} \tag{5.14}$$

e substituímos na Eq. (5.12). Logo,

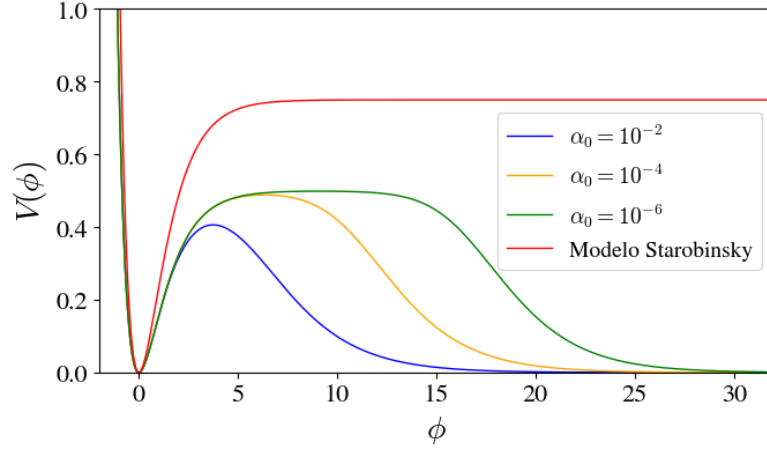
$$\boxed{V(\Phi, \zeta) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} 3M^2 e^{-2\Phi} \zeta \left\{ e^\Phi - 1 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{\alpha_0}{3}\zeta^2 \right\}}. \tag{5.15}$$

Antes de estudarmos a dinâmica de *slow-roll* para esse modelo, mostramos na Fig. 12 a comparação entre o potencial de Starobinsky, visto na Eq. (4.20), e o do novo modelo estudado (5.12), variando novamente α_0 para 10^{-2} , 10^{-4} e 10^{-6} . Notamos que inicialmente, em $\phi < 0$, todas as curvas comportam-se igualmente. O platô do modelo de Starobinsky inicia por volta de $\phi = 6$, com valor assintótico $V(\phi) \simeq 0,74$. O potencial de Starobinsky permanece no platô quando $\phi \rightarrow \infty$ e tem um ponto crítico³⁸ mínimo em $\phi = 0$. O modelo trabalhado nesse capítulo apresenta os pontos críticos máximos em $\phi_c \simeq 3,06$, $\phi_c \simeq 5,18$ e $\phi_c \simeq 7,46$ para $\alpha_0 = 10^{-2}, 10^{-4}$ e $\alpha_0 = 10^{-6}$, respectivamente.

³⁸Um ponto crítico ocorre quando a derivada da função em relação à variável arbitrária é zero e a natureza desse ponto (máximo, mínimo ou inflexão) depende da segunda derivada da função.

Esses resultados serão explicados na Seção 5.6. Percebemos que todas as curvas tendem ao potencial zero para valores suficientemente grandes de ϕ . Quanto menor a correção ao modelo de Starobinsky maior é o intervalo de valores de ϕ em que o potencial apresenta o platô. Ou seja, entre os α_0 analisados, o *slow-roll* permanece em maior intervalo de ϕ na correção $\alpha_0 = 10^{-6}$, o que permite que a inflação consequentemente também dure mais tempo.

Figura 12 – Potenciais no *frame* de Einstein para os dois modelos inflacionários *versus* campo escalar em unidades de massa de Planck. Para valores positivos de ϕ , e com $\alpha_0 = 10^{-2}$ o máximo local associado ao potencial está em $\phi_c \approx 3,06$, para $\alpha_0 = 10^{-4}$ temos $\phi_c \approx 5,18$ e para $\alpha_0 = 10^{-6}$ o valor máximo é $\phi_c \approx 7,46$. Notamos que conforme α_0 aproxima-se de 0, o potencial permanece com platô em um maior intervalo de ϕ . Em $\phi < 0$ todas as curvas apresentam o mesmo comportamento.



Fonte: Autora

Assim, com o potencial (5.15) escrevemos a ação, pois lembramos da Eq. (4.18)

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\nu \Phi \tilde{\nabla}^\nu \Phi - M^2 \frac{1}{e^{2\Phi}} \frac{\chi}{3M^2} \left\{ e^\Phi - 1 - \frac{1}{2} \frac{\chi}{3M^2} - \frac{\alpha_0}{3} \left(\frac{\chi}{3M^2} \right)^2 \right\} \right] \right\}, \quad (5.16)$$

onde

$$\mathcal{V}(\Phi, \chi) = e^{-2\Phi} \frac{\chi}{3} \left[e^\Phi - 1 - \frac{\chi}{6M^2} - \frac{\alpha_0}{27M^4} \chi^2 \right]. \quad (5.17)$$

Compactando, temos

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\nu \Phi \tilde{\nabla}^\nu \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right\}. \quad (5.18)$$

5.2 Equações de movimento

Como toda dinâmica requer, nesta seção,³⁹ iremos apresentar as equações de movimento associadas à ação da Eq. (5.18), variando a ação S em relação à métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$ e variando S em relação ao campo χ .

- Relacionada ao tensor métrico $\tilde{g}^{\mu\nu}$:

$$\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R} = \frac{3}{2}\left[\tilde{\nabla}^\mu\Phi\tilde{\nabla}^\nu\Phi - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\rho\Phi\tilde{\nabla}^\rho\Phi - \tilde{g}^{\mu\nu}\mathcal{V}(\Phi,\chi)\right]$$

onde definimos o tensor energia-momento efetivo sendo

$$\frac{1}{M_{\text{Pl}}^2}\bar{T}^{\mu\nu(\text{eff})} \equiv \frac{3}{2}\left[\tilde{\nabla}^\mu\Phi\tilde{\nabla}^\nu\Phi - \tilde{g}^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_\rho\Phi\tilde{\nabla}^\rho\Phi - \mathcal{V}(\Phi,\chi)\right)\right].$$

Este tensor é consistente com a Eq. (7) do artigo (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022) que trabalha um modelo inflacionário que inclui R^3 .

- Relacionada ao campo Φ :

$$\tilde{\square}\Phi = \frac{\partial V}{\partial\Phi}, \quad (5.19)$$

onde $\tilde{\square}$ é o d'Alembertiano conforme. Este resultado é precisamente a equação de Klein-Gordon.

5.3 Dinâmica *slow-roll* do modelo Starobinsky $+R^3$

Com o potencial apresentado na Eq. (5.12), estamos aptos a entender se os parâmetros de *slow-roll* deste modelo satisfazem as condições que permitem a inflação acontecer durante tempo suficiente, com as quantidades físicas⁴⁰ variando lentamente. Iniciamos estudando o parâmetro ε , escrito em termos de V . Para isso, precisamos da primeira derivada do potencial (5.12) em relação a ϕ . Depois de um cálculo longo, mas direto,

³⁹Os resultados aqui apresentados foram demonstrados no Apêndice D.

⁴⁰Durante a inflação, as quantidades físicas que variam lentamente incluem o campo inflacionário (ϕ), sua taxa de variação ($\dot{\phi}$), a segunda derivada do campo ($\ddot{\phi}$), o potencial ($V(\phi)$), a taxa de expansão do universo (H) e a densidade de energia (ρ). Essas variações lentas são essenciais para garantir uma inflação prolongada e controlada, em conformidade com as condições de *slow-roll*, permitindo uma expansão estável e explicando as flutuações observadas no universo.

obtem-se:

$$\begin{aligned}
V' = & \frac{M_{\text{Pl}} M^2}{2 \cdot 2\alpha_0} \left\{ 3\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^{-1} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] - 2\sqrt{\frac{2}{3}}(3\varphi - 3)\varphi^{-2} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \right. \\
& + 2\alpha_0\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^{-1}(3\varphi - 3) \left[1 - 4\alpha_0(1 - \varphi) \right]^{-1/2} \\
& - 4\alpha_0\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^{-1} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \left[1 - 4\alpha_0(1 - \varphi) \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0}\sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \\
& + 2\sqrt{\frac{2}{3}} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right]^2 \varphi^{-2} \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0}\sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \\
& \left. - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \left[1 - 4\alpha_0(1 - \varphi) \right]^{-1/2} \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right]^2 \varphi^{-1} \right\} \quad (5.20)
\end{aligned}$$

onde φ foi definido na Eq. (5.11). Esta definição permite colocar a Eq. (5.12) na forma

$$\begin{aligned}
V = & \frac{M_{\text{Pl}}^2 M^2}{2 \cdot 2\alpha_0} \left\{ (3\varphi - 3) \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \right. \\
& \left. - \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right]^2 \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0}\sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right] \right\} \varphi^{-2}. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (5.20) e (5.21) na Eq. (3.28) para ε_V , temos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_V(\phi) = & \frac{1}{2}\varphi^4 \left[3\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^{-1}\gamma - 2\sqrt{\frac{2}{3}}(3\varphi - 3)\Phi^{-2}\gamma + 2\alpha_0\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^{-1}(3\varphi - 3)\beta^{-1} \right. \\
& \left. - 4\alpha_0\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^{-1}\gamma\beta^{-1}\Xi + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^2\varphi^{-2}\Xi - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\beta^{-1}\gamma^2\varphi^{-1} \right]^2 \left[(3\varphi - 3)\gamma - \gamma^2\Xi \right]^{-2} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

sendo

$$\gamma \equiv \left[-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right], \quad \beta \equiv \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \quad \text{e} \quad \Xi \equiv \left[\frac{1}{2\alpha_0} + \frac{1}{4\alpha_0}\sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \right].$$

Depois de alguma álgebra envolvendo a expansão em série de Taylor $\sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - \varphi)} \approx 1 - 2\alpha_0(1 - \varphi)$, podemos mostrar que, para $\alpha_0 \ll 1$, a Eq. (5.22) reduz-se para:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V(\phi) = \frac{1}{2}\Phi^4 \left\{ \left[6\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^{-1}(\varphi - 1) - 12\sqrt{\frac{2}{3}}(\varphi - 1)^2\varphi^{-2} \right. \right. \\ + 6\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi^{-1}(\varphi - 1)[1 - 2\alpha_0(1 - \varphi)]^{-1/2} \\ - 6\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi^{-1}(\varphi - 1)[1 - 2\alpha_0(1 - \varphi)]^{-1/2} \\ \left. \left. + 6\sqrt{\frac{2}{3}}(\varphi - 1)^2\varphi^{-2} \right] \left[6(\varphi - 1)^2 - 3(\varphi - 1)^2 \right]^{-1} \right\}^2. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Fazendo $\alpha_0 \rightarrow 0$ na Eq. (5.23), obtemos:

$$\varepsilon_V(\phi) = \frac{4}{3} \frac{1}{\left[\exp\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) - 1 \right]^2}.$$

Esse é justamente o resultado para o modelo de Starobinsky, dado na Eq. (4.22).

Podemos analisar o comportamento da função da Eq. (5.22) na Fig. 13. Nesta imagem, vemos que, inicialmente, todas as curvas estão sobrepostas. O modelo de Starobinsky, para todo $\phi > 3$, apresenta $\varepsilon_V = 0$, o que garante a inflação nesses valores de campo, pois sabemos que a condição $\varepsilon \ll 1$ deve ser satisfeita. Contudo, não há o mesmo comportamento para α_0 cada vez mais próximo de zero. Em outras palavras, ao longo das variações de α_0 (ou seja, conforme as correções vão ficando cada vez menores), as curvas permanecem com $\varepsilon_V \simeq 0$ por um intervalo maior de ϕ . Todavia, todas as curvas tendem para o mesmo limite, $\varepsilon_V = 1/12$, quando $\phi \rightarrow \infty$. Já que neste trabalho não especificamos um valor exato para o limite inferior de ε_V , consideramos que esse limite também permite que as quantidades físicas variem lentamente.

Nesse limite assintótico, $\lim_{\phi \rightarrow \infty} \varepsilon_V = \frac{1}{12}$, podemos encontrar em qual regime a inflação está acontecendo, através do estudo do fator de escala. Com a definição (3.4), temos a igualdade

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{12} \quad (5.24)$$

daí reescrevemos o termo \dot{H} como dH/dt e fazemos

$$-\int \frac{dH}{H^2} = \int \frac{1}{12} dt \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{t}{12},$$

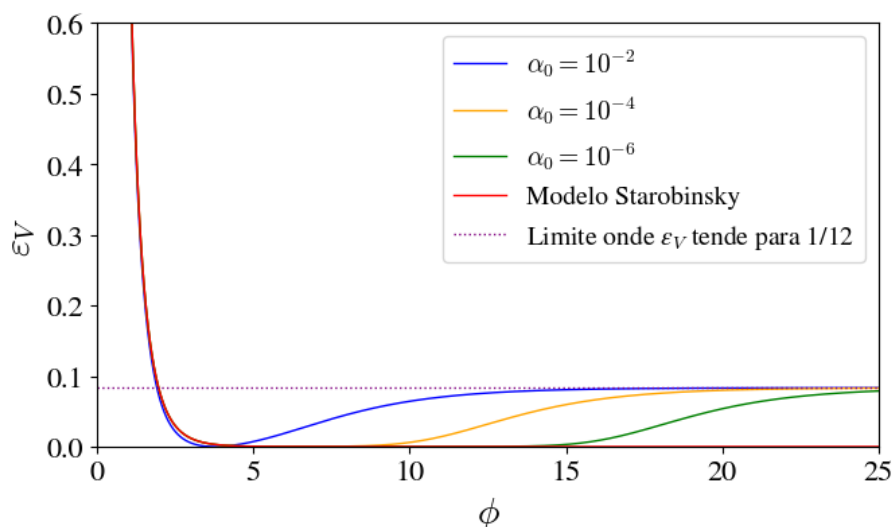
onde a constante de integração foi desprezada sem perda de generalidade. Podemos escrever o parâmetro de Hubble em função do fator de escala, pois temos ciência de que $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. Dito isso, temos a possibilidade de integrar novamente e obter

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{12}{t} \Rightarrow \int \frac{da}{a} = 12 \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln a = 12 \ln t,$$

onde, novamente, desprezamos a constante de integração, já que estamos interessados no comportamento geral. Notamos que o fator de escala comporta-se com uma lei de potência, $a \sim t^{12}$. Esse resultado está contido na Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022), na Subseção IV A.

Conforme o campo escalar ϕ evolui, com deslocamento *transplnckiano*, ele pode migrar para uma configuração onde a inflação se encerra e ocorre a transição para a era de radiação. No entanto, se o campo não atingir o ponto crítico $(\Phi_c, 0)$, a inflação pode continuar indefinidamente, sem conexão com um cenário cosmológico realista (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Portanto, a existência desse ponto crítico impõe uma restrição importante sobre as condições iniciais do campo escalar, garantindo que a inflação possa ter um fim (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022).

Figura 13 – Gráfico ε_V versus ϕ em unidades de Planck. Há 3 curvas para o modelo que adiciona R^3 na ação de Starobinsky com respectivos valores de correção α_0 . Para a maior correção, $\alpha_0 = 10^{-2}$, o comportamento da função permanece por um menor intervalo de ϕ em $\varepsilon_V \simeq 0$. Todas as correções tendem ao mesmo valor $\varepsilon_V = 1/12$ para $\phi \rightarrow \infty$.



Fonte: Autora

5.4 Parâmetro η

Para finalizar a dinâmica deste modelo, buscamos calcular o segundo parâmetro η_V , dado pela Eq. (3.28). Um cálculo extenso, porém sem qualquer nuance, mostra que a segunda derivada da Eq. (5.12) resulta em:

$$\begin{aligned}
V'' = M^2 & \left\{ \beta^{-1} - \frac{1}{2\alpha_0} \varphi^{-1} \gamma - \frac{1}{\alpha_0} \varphi^{-1} \gamma + (3\varphi - 3) \frac{2}{3\alpha_0} \varphi^{-2} \gamma - \right. \\
& (3\varphi - 3) \frac{2}{3} \varphi^{-1} \beta^{-1} + \beta^{-1} - \frac{1}{3} (3\varphi - 3) \varphi^{-1} \beta^{-1} - \frac{2\alpha_0}{3} 3(\varphi - 1) \beta^{-3} \\
& + \left[\frac{2}{3} \varphi^{-1} \beta^{-1} (-1 + \beta) - \frac{4}{3} \alpha_0 \beta^{-2} + \frac{4}{3} \alpha_0 \beta^{-3} \gamma \right] \Xi - \frac{1}{3} \beta^{-2} \gamma + \frac{4}{3} \varphi^{-1} \gamma \beta^{-1} \Xi \\
& \left. + \gamma^2 \left[-\frac{2}{3\alpha_0} \varphi^{-2} \Xi + \frac{1}{6\alpha_0} \varphi^{-1} \beta^{-1} \right] + \frac{1}{6} \beta^{-3} \gamma^2 + \frac{1}{12\alpha_0} \beta^{-1} \varphi^{-1} \gamma^2 - \frac{1}{3} \gamma \beta^{-2} \right\}. \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Substituindo as Eqs. (5.25) e (5.21) na Eq. (3.28) para η_V , vemos:

$$\begin{aligned}
\eta_V(\phi) = \varphi^2 & \left\{ 4\alpha_0 \beta^{-1} - 2\varphi^{-1} \gamma - 4\varphi^{-1} \gamma + (3\varphi - 3) \frac{8}{3} \varphi^{-2} \gamma \right. \\
& - (3\varphi - 3) \frac{8\alpha_0}{3} \varphi^{-1} \beta^{-1} + 4\alpha_0 \beta^{-1} - 4\alpha_0 (\varphi - 1) \varphi^{-1} \beta^{-1} - \frac{8\alpha_0^2}{3} 3(\varphi - 1) \beta^{-3} \\
& + \left[\frac{8\alpha_0}{3} \varphi^{-1} \beta^{-1} \gamma - \frac{16\alpha_0^2}{3} \beta^{-2} + \frac{16\alpha_0^2}{3} \beta^{-3} \gamma \right] \Xi - \frac{4\alpha_0}{3} \beta^{-2} \gamma + \frac{1}{3} \varphi^{-1} \gamma \beta^{-1} (8 + 4\beta) \\
& + \gamma^2 \left[-\frac{8}{3} \varphi^{-2} \Xi + \frac{2}{3} \varphi^{-1} \beta^{-1} \right] + \frac{4\alpha_0}{6} \beta^{-3} \gamma^2 + \frac{1}{3} \beta^{-1} \varphi^{-1} \gamma^2 - \frac{4\alpha_0}{3} \gamma \beta^{-2} \left. \right\} \\
& \left\{ 3(\varphi - 1) \gamma - \gamma^2 \Xi \right\}^{-1}. \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que, no limite $\alpha_0 \rightarrow 0$, esse resultado reduz-se a:

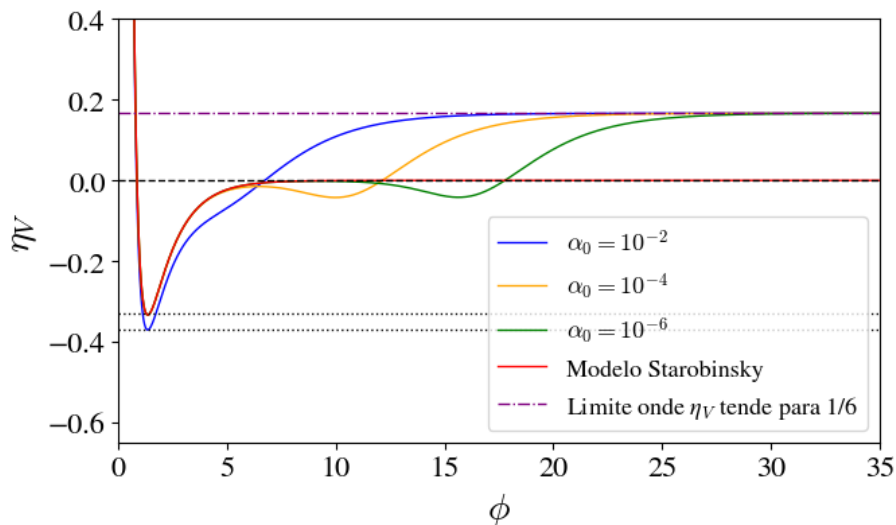
$$\eta_V(\phi) = -\frac{4}{3} \left(\exp \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \right)^{-1} \frac{\left[1 - 2 \left(\exp \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \right)^{-1} \right]}{\left[1 - \left(\exp \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}} \right)^{-1} \right]^2}$$

como na Eq. (4.24).

Já que confirmamos que o parâmetro η está retornando à nossa referência de Starobinsky, podemos analisar o comportamento da função na curva da Fig. 14. Na figura, o eixo horizontal representa o valor do campo escalar *inflaton* ϕ em unidades de Planck. No eixo vertical, temos o parâmetro de *slow-roll* η_V , que mede a curvatura do potencial

inflacionário e está diretamente relacionado à aceleração da inflação.⁴¹ Valores negativos em η_V indicam que a inflação está acontecendo de forma eficiente,⁴² enquanto valores próximos de zero sugerem que a inflação está desacelerando e prestes a terminar. Cada curva corresponde a um valor diferente de α_0 , o qual representa uma correção ao modelo de Starobinsky. Valores menores de α_0 (como $\alpha_0 = 10^{-6}$) indicam correções menores, enquanto valores maiores, como $\alpha_0 = 10^{-2}$, representam correções mais significativas. Estas mesmas correções foram aplicadas na Fig. 13. À medida que ϕ aumenta, todas as curvas tendem a se alinhar, mostrando que o impacto das correções diminui para valores altos de ϕ . A linha roxa indica um limite teórico no qual η_V se aproxima de $1/6$ quando $\phi \rightarrow \infty$. Esse comportamento pode estar relacionado a um estado assintótico no modelo.

Figura 14 – Gráfico gerado para análise do comportamento de η_V versus ϕ escrito em unidades de Planck. Para todas as correções α_0 temos uma tendência de convergirem para $\eta_V = 1/6$ quando $\phi \rightarrow \infty$. O valor mínimo de η_V para $\alpha_0 = 10^{-2}$ é $\eta_V \approx -0,37$ e para as demais curvas (incluindo o Modelo Starobinsky) temos $\eta_V \approx -0,33$.



Fonte: Autora

Por fim, na Fig. 15, analisamos o comportamento dos dois parâmetros fundamentais que garantem a eficiência da inflação para resolver os problemas da cosmologia dentro

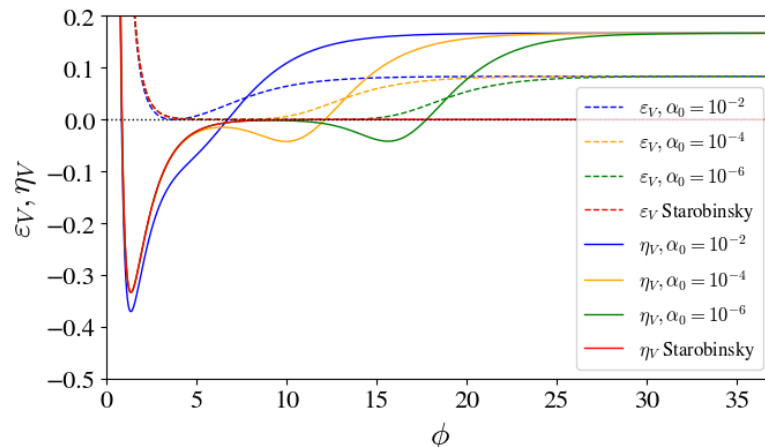
⁴¹A curvatura do potencial V está relacionada à segunda derivada do potencial em relação ao campo ϕ . O parâmetro controla a rapidez com que o campo ϕ percorre o potencial. Se $\eta_V \gg 1$, o campo *inflaton* rola rapidamente, e a curvatura do potencial se torna muito acentuada, interrompendo o regime de *slow-roll* e, conseqüentemente, a inflação. Para $\eta_V \ll 1$, o campo *inflaton* rola devagar, o que sustenta a inflação por mais tempo, pois a curvatura do potencial não acelera demais o movimento do campo.

⁴²O sinal negativo está relacionado à forma do potencial $V(\phi)$. O parâmetro η nos informa sobre a concavidade do potencial e, se $\eta_V < 0$, então o potencial tem curvatura negativa, ou seja, a região onde ϕ se encontra é "côncava para cima" e esse formato amortece o movimento de ϕ , favorecendo o regime de *slow-roll*. No modelo de Starobinsky, o parâmetro η_V pode atingir valores negativos na fase inicial do rolamento do campo ϕ , onde o potencial é quase plano, mas com curvatura ligeiramente negativa. Isso corresponde à fase mais eficiente da inflação (Baumann, 2012; Starobinsky, 1980).

deste modelo. Explicitamente, vemos no eixo x a variável ϕ — que está escrita em unidades de Planck — e no eixo y temos os parâmetros de *slow-roll* de Hubble. Seguindo o código de cores, vemos as curvas azuis para as maiores correções do modelo de Starobinsky, ou seja, $\alpha_0 = 10^{-2}$; curvas laranjas com $\alpha_0 = 10^{-4}$ e verdes com $\alpha_0 = 10^{-6}$ para o modelo trabalhado neste capítulo. Ressaltamos que tanto as curvas tracejadas quanto as contínuas apresentam esses valores, sendo as tracejadas para o parâmetro ε_V e as contínuas para η_V . As curvas vermelhas são nossas curvas de referência, pois referem-se ao modelo de Starobinsky.

Na Fig. 15, mostramos o comportamento de ambos os parâmetros da dinâmica escalar e vemos em qual regime do campo ϕ ambos obedecem às suas respectivas condições, ou seja, $\varepsilon_V \ll 1$ e $|\eta_V| \ll 1$. Após a análise da Fig. 14, observamos que o parâmetro η_V impõe uma limitação no intervalo de ϕ necessário para que a inflação ocorra. Assim, mesmo que o intervalo para $\varepsilon_V \ll 1$ seja maior em ϕ , precisamos que simultaneamente ambos os parâmetros respeitem a condição de *slow-roll*. Dito isso, estabelecemos o intervalo de $0 < \phi < 5$ para a inflação nesse modelo, e essa imposição está em consonância com o que será discutido na Seção 5.5 ao analisarmos a Fig. 16.

Figura 15 – Neste gráfico temos os dois parâmetros essenciais na descrição do modelo inflacionário com o termo R^3 . Seguimos o código de cores e repetimos as correções já escolhidas posteriormente. É possível notar que as condições $\varepsilon_V \ll 1$ e $|\eta_V| \ll 1$ são respeitadas no intervalo $0 < \phi < 5$.



Fonte: Autora

A título de completar o estudo da dinâmica, na próxima seção analisamos o espaço de fase do modelo e então vemos em qual ponto há o atrator da inflação e se há algum limite de divergência.

5.5 Espaço de fase

O espaço de fase do modelo estudado neste capítulo permite compreender melhor a dinâmica do campo escalar ϕ . Para isso, combinamos as Eqs. (3.20) e (3.14) em uma única equação diferencial ordinária, a qual resolvemos numericamente. Iremos utilizar como referência a análise feita em (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Dessa forma, a equação de Friedmann tem a forma

$$H^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (5.27)$$

e a equação de movimento será

$$\ddot{\phi} + 3\sqrt{\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}V(\phi)}\dot{\phi} + V'(\phi) = 0.$$

Então, organizamos fazendo

$$\ddot{\phi} = -3\sqrt{\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}V(\phi)}\dot{\phi} - V'(\phi)$$

e reescrevemos $\ddot{\phi}$ como

$$\frac{d\dot{\phi}}{dt} = -3\sqrt{\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}V(\phi)}\dot{\phi} - V'(\phi),$$

mas há uma regra da cadeia implícita, o que nos permite finalmente obter

$$\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \frac{-3\sqrt{\frac{1}{4}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}V(\phi)}\dot{\phi} - V'(\phi)}{\dot{\phi}} \quad (5.28)$$

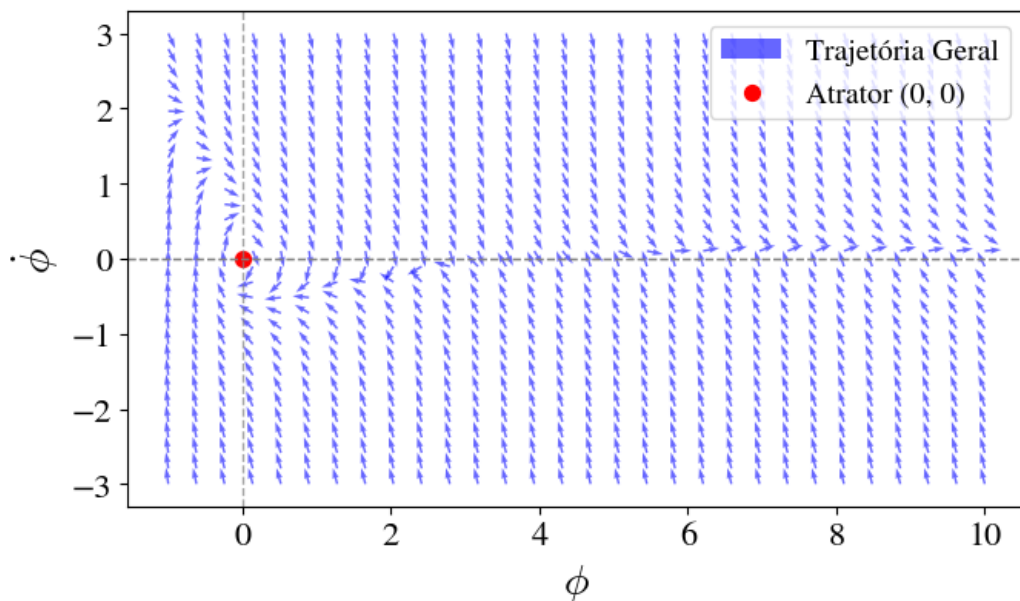
onde V e V' são as Eqs. (5.12) e (5.20), respectivamente. Além disso, assumimos $\alpha_0 = 10^{-2}$. A solução da Eq. (5.28), tratada como um sistema paramétrico, possibilitou a construção da Fig. 16. Neste gráfico, vemos que o espaço de fase apresenta dois pontos críticos, sendo um deles mais visivelmente notável, pois está na origem $(\phi, \dot{\phi})_0 = (0,0)$ e o outro que está em $(\phi, \dot{\phi})_c = (\Phi_c, 0)$, onde Φ_c é a Eq. (5.35).

A Fig. 16 nos permite observar que, para $\phi < 3$,⁴³ os vetores são atraídos para o

⁴³Vale comentar que ϕ está em unidades de massa de Planck.

ponto existente nas proximidades de $\dot{\phi} \approx 0$, sendo essa a região onde ocorre a inflação. Para valores maiores de ϕ , notamos que os vetores não vão de encontro ao atrator, demonstrando que há uma limitação para a inflação neste modelo. Ademais, o ponto crítico $(\Phi_c, 0)$ divide o gráfico em duas regiões: uma onde os vetores convergem para o atrator $(0,0)$ e outra onde os vetores crescem indefinidamente. No lado esquerdo deste ponto, o processo de *slow-roll* ocorre, e a inflação se desenvolve conforme discutido na Subseção 3.4. Nesse caso, o campo escalar ϕ , ao se aproximar de $(0,0)$, gira continuamente em torno da origem, como visto explicitamente na Fig. 16. Este comportamento corresponde à fase de oscilações que ocorrem no início do processo de reaquecimento (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Na Fig. 8, essa etapa é representada quando o campo escalar chega ao poço do potencial. Na segunda região ($\phi > 4$), tanto $V(\phi)$ quanto $\dot{\phi}$ se aproximam de zero quando $\phi \gg 1$, conforme as Eqs. (5.12) e (5.28).

Figura 16 – Espaço de fase, em unidades de Planck, do modelo que adiciona R^3 na ação de Starobinsky e com $\alpha_0 = 10^{-2}$. Notamos que há um atrator em $(0,0)$ e o campo vetorial apresenta uma divergência a partir de um ponto crítico, sugerindo que a inflação não ocorra para todos os valores de ϕ .



Fonte: Autora

5.6 Número de N e -folds

O elo entre o modelo inflacionário e as observações cosmológicas é dado pelo número de N e -folds, que por sua vez é

$$N = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_{\Phi}^{\Phi_e} \frac{|d\Phi|}{\sqrt{\varepsilon_V}}. \quad (5.29)$$

Este é o resultado (D.10), cuja expressão foi deduzida no Apêndice D. Nessa seção, temos o enfoque em determinar essa equação para o modelo inflacionário que adiciona a extensão R^3 no Modelo de Starobinsky. Assim, introduzimos, guiados pela Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022), a definição de um parâmetro de *slow-roll*

$$\delta \equiv e^{-\Phi}, \quad (5.30)$$

para Φ adimensional:

$$\Phi \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\phi} \quad \text{e} \quad \phi \equiv M_{\text{Pl}} \bar{\phi}.$$

Com esse novo parâmetro, buscamos escrever a Eq. (5.29). Para isso, fazemos

$$\delta = e^{-\Phi} \Rightarrow \ln \delta = -\Phi,$$

e conseqüentemente,

$$\frac{d\delta}{\delta} = -d\Phi \Rightarrow -\frac{d\delta}{\delta} = d\Phi.$$

Escrevemos (5.29) com o resultado acima, veja:

$$N = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_{\Phi}^{\Phi_e} \frac{\left| -\frac{d\delta}{\delta} \right|}{\sqrt{\varepsilon_V}},$$

onde os limites de integração são:

$$\Phi = -\ln \delta \quad \text{e} \quad \Phi_e = -\ln \delta_e.$$

O parâmetro ε_V adimensional é escrito como⁴⁴:

$$\sqrt{\varepsilon_V} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{V'}{V} \right|, \quad (5.31)$$

sendo $V' \equiv dV/d\Phi$. Notamos que é preciso substituir o potencial e sua primeira derivada. Para obter o mesmo resultado da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022), precisamos alterar o formato do nosso potencial (5.12) para a Eq. (3) da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Então, substituindo a Eq. (5.14) na Eq. (5.12), colocamos $\frac{1}{4\alpha_0}$ em evidência, aplicamos as devidas propriedades distributivas e juntamos alguns termos, obtendo

$$V(\Phi) = \frac{M^2}{12\alpha_0^2} e^{-2\Phi} \left[6\alpha_0 (1 - e^\Phi) - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi) \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi)} - 1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi)} \right].$$

Com a Eq. (3) da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022), podemos fazer o seguinte mapeamento: se $\kappa_0 = 3M^2$, então escrevemos $M^2 = \kappa_0/3$. Por conseguinte, aplicamos essa relação no resultado acima, daí

$$V(\Phi) = \frac{\kappa_0}{36\alpha_0^2} e^{-2\Phi} \left\{ -1 + 6\alpha_0 (1 - e^\Phi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi)} - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi) \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi)} \right\}. \quad (5.32)$$

Demonstramos que esse resultado é idêntico ao apresentado na Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022), especificamente no Apêndice D. Com base nessa seção, podemos então afirmar que a Eq. (5.32) pode ser reescrita como:

$$V(\Phi) = \frac{\kappa_0}{72\alpha_0^2} e^{-2\Phi} \left[1 - \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi)} \right] \left[-1 + 8\alpha_0 (1 - e^\Phi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0 (1 - e^\Phi)} \right]. \quad (5.33)$$

Esta equação está no artigo (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022) na Eq. (3), contudo, com outra variável para o campo. Além disso, fazemos dois adendos cruciais:

- Para que o potencial acima seja bem definido para todos os números reais, é necessário que

$$0 \leq \alpha_0 \leq \frac{1}{4}. \quad (5.34)$$

⁴⁴Confira a Eq. (D.9) do Apêndice D.

- No limite assintótico onde $\Phi \gg 1$, temos que o termo $e^{-2\Phi}$ decai rapidamente fazendo com que $V(\Phi) \rightarrow 0$.

Ademais, numericamente foi possível obter os pontos críticos (mínimo e máximo) deste potencial. Sabendo que o processo para determinar esses pontos envolve calcular a derivada do potencial em relação a Φ e igualá-la a zero, os resultados foram

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= 0 \rightarrow (\text{ponto mínimo}), \\ \Phi_c &= \ln\left(4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}}\right) \rightarrow (\text{ponto máximo}).\end{aligned}\quad (5.35)$$

Note que $\alpha_0 \ll 1$ leva a $\Phi_c \gg 1$. Essa condição não viola a Eq. (5.34). Além do mais, para determinar os pontos críticos, que são visualizados na Fig. 12, é preciso substituir $\alpha_0 = 10^{-2}, 10^{-4}$ e $\alpha_0 = 10^{-6}$ na Eq. (5.35).

A seguir, buscamos encontrar as equações aproximadas do potencial, dado pela Eq. (5.33), e suas primeiras e segundas derivadas em relação ao campo, a fim de calcular N , que, por sua vez, é o principal resultado desta seção. Em seguida, realizamos algumas manipulações algébricas para incluir a Eq. (5.30) no potencial (5.33). Inicialmente, onde aparece o termo $(1 - e^\Phi)$, vamos escrever

$$(1 - e^\Phi) = 1 - \frac{1}{\delta} = \frac{\delta - 1}{\delta} \rightarrow \delta^{-1}(\delta - 1)$$

e reescrever a Eq. (5.36) em termos da escala de energia M^2 e da variável δ , definido na Eq. (5.6), veja:

$$\boxed{V = -\frac{M^2}{24\alpha_0^2} \left[-\delta + \delta\sqrt{1 - 4\alpha_0\delta^{-1}(\delta - 1)} \right] \left[-\delta + 8\alpha_0(\delta - 1) + \delta\sqrt{1 - 4\alpha_0\delta^{-1}(\delta - 1)} \right]}.\quad (5.36)$$

O resultado acima é a equação logo após a Eq. (21) apresentada na Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Em adição, sabemos que o valor máximo do potencial consistente com um regime inflacionário físico ocorre para $V(\Phi_c)$ (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Dessa forma, para realizar a aproximação do potencial, analisaremos a correção do modelo de Starobinsky α_0 por meio do ponto

crítico máximo, dado pela Eq. (5.35). Isto é:

$$\exp \Phi_c = 4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \rightarrow \alpha_0 = \frac{3}{(\exp \Phi_c - 4)^2}.$$

Aqui definimos o parâmetro crítico

$$\delta_c \equiv e^{-\Phi_c}. \quad (5.37)$$

No regime de *slow-roll*, é necessário que $V' \approx 0$, e essa condição é atingida quando $\Phi \gg 1$, garantindo um comportamento assintótico adequado. Isso significa que se $\Phi_c \gg 1$, então $e^{\Phi_c} \gg 1$. Isso leva a

$$\alpha_0 \approx 3 (e^{-\Phi_c})^2 = 3\delta_c^2, \quad (5.38)$$

e se multiplicarmos α_0 por $4\delta^{-1}$, encontramos o termo que aparece na Ref. (5.36). Assim

$$4\alpha_0\delta^{-1} \approx 12\delta_c^2\delta^{-1}. \quad (5.39)$$

O valor máximo de Φ consistente com a inflação é Φ_c , pois para $\Phi > \Phi_c$ estamos na região à direita da Fig. 16, que não leva à inflação. Nesse valor limite, temos

$$\Phi \approx \Phi_c \Rightarrow \delta \approx \delta_c.$$

Com essa implicação, a Eq. (5.39) resulta em:

$$4\alpha_0\delta^{-1} \approx 12\delta_c^2\delta^{-1} \Rightarrow 4\alpha_0\delta^{-1} \approx 12\delta. \quad (5.40)$$

Note que a definição da Eq. (5.37) implica que, se o valor de Φ é grande (contudo, ainda menor que Φ_c), δ será pequeno, ou seja, $\Phi \gg 1 \Rightarrow \delta \ll 1$. Essa conjectura está dentro do regime de *slow-roll* e podemos concluir que $12\delta \ll 1$. Pela Eq. (5.40), temos

$$4\alpha_0\delta^{-1} \approx 12\delta_c^2\delta^{-1} \approx 12\delta \ll 1. \quad (5.41)$$

Dito de outra forma, o *slow-roll* ocorre para $\delta \ll 1$, mas ainda assim δ é positivo e o campo escalar Φ fica nas proximidades do platô. O resultado da Eq. (5.40) mostra que a quantidade $4\alpha_0\delta^{-1}$ contribui em grande maioria no regime de *slow-roll* em pri-

meira ordem, enquanto α_0 , especificamente atua em segunda ordem (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Com essas considerações, fazemos uma expansão em série de Taylor até segunda ordem para o termo que contém $4\alpha_0\delta^{-1}$. Então, sabendo a aproximação

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + n\frac{(n-1)}{2}x^2,$$

para $x = -4\alpha_0\delta^{-1}(\delta-1)$ fazemos

$$\sqrt{1 - 4\alpha_0\delta^{-1}(\delta-1)} \approx 1 - 2\alpha_0\delta^{-1}(\delta-1) - 2\alpha_0^2\delta^{-2}(\delta-1)^2.$$

Munidos desse resultado, substituímos no potencial, visto na Eq. (5.36):

$$V \approx -\frac{M^2}{24\alpha_0^2} [4\alpha_0^3\delta^{-1}(\delta-1)^3 - 12\alpha_0^2(\delta-1)^2 + 4\alpha_0^4\delta^{-2}(\delta-1)^4 - 12\alpha_0^3\delta^{-1}(\delta-1)^3]$$

e descartamos termos de $\mathcal{O}(\alpha_0^4)$, pois queremos ir somente até termos de terceira ordem, de forma que o termo $\alpha_0\delta^{-1}$ ainda esteja presente no resultado final, convergindo com o resultado da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Consequentemente, reduzimos

$$V \approx -\frac{M^2}{24\alpha_0^2} [-12\alpha_0^2(\delta-1)^2 - 8\alpha_0^3\delta^{-1}(\delta-1)^3] \approx -M^2 \left[-\frac{1}{2}(\delta-1)^2 - \frac{1}{3}\alpha_0\delta^{-1}(\delta-1)^3 \right].$$

Já que sabemos $\kappa_0 = 3M^2$ e $\delta^2 \lll 1$, fazemos

$$V \approx -\kappa_0 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{9}\alpha_0\delta^{-1} + \frac{1}{3}\alpha_0\delta - \frac{1}{3}\alpha_0 \right).$$

Os termos, do resultado acima, que contém $\alpha_0\delta^{-1}$ e δ estão em primeira ordem, o termo α_0 está em segunda ordem e o termo $\alpha_0\delta$ está em terceira ordem. Para obtermos precisamente as Eqs. (24), (25) e (26) da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022), consideramos somente correção de primeira ordem. Dessa forma

$$\boxed{V \approx \frac{\kappa_0}{6} \left(1 - 2\delta - \frac{2}{3}\alpha_0\delta^{-1} \right)}. \quad (5.42)$$

A física da inflação depende diretamente da primeira e da segunda derivada da Eq.

(5.42). Por isso, lembrando que δ é uma função exponencial, escrevemos

$$V \approx \frac{\kappa_0}{6} \left(1 - 2e^{-\Phi} - \frac{2}{3}\alpha_0 e^{\Phi} \right)$$

daí

$$V' \approx \frac{\kappa_0}{3} \left(e^{-\Phi} - \frac{1}{3}\alpha_0 e^{\Phi} \right) \quad (5.43)$$

e

$$V'' \approx -\frac{\kappa_0}{3} \left(e^{-\Phi} + \frac{1}{3}\alpha_0 e^{\Phi} \right). \quad (5.44)$$

Escrevemos esses dois últimos resultados em termos de δ , veja:

$$V' \approx \frac{\kappa_0}{3} \left(\delta - \frac{1}{3}\alpha_0 \delta^{-1} \right) \quad \text{e} \quad V'' \approx -\frac{\kappa_0}{3} \left(\delta + \frac{1}{3}\alpha_0 \delta^{-1} \right).$$

Estamos aptos a determinar $\sqrt{\varepsilon_V}$. Nesse sentido, substituímos as Eqs. (5.43) e (5.6) na Eq. (5.31), confira:

$$\sqrt{\varepsilon_V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\frac{\kappa_0}{3} (e^{-\Phi} - \frac{1}{3}\alpha_0 e^{\Phi})}{\frac{\kappa_0}{6} (1 - 2e^{-\Phi} - \frac{2}{3}\alpha_0 e^{\Phi})} \right] = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{(e^{-\Phi} - \frac{1}{3}\alpha_0 e^{\Phi})}{(1 - 2e^{-\Phi} - \frac{2}{3}\alpha_0 e^{\Phi})} \quad (5.45)$$

e por isso

$$N = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int_{\Phi}^{\Phi_e} \frac{\sqrt{2} (1 - 2e^{-\Phi} - \frac{2}{3}\alpha_0 e^{\Phi})}{2 (e^{-\Phi} - \frac{1}{3}\alpha_0 e^{\Phi})} \left| \frac{d\delta}{\delta} \right| = \frac{3}{4} \int_{\Phi}^{\Phi_e} \frac{(1 - 2e^{-\Phi} - \frac{2}{3}\alpha_0 e^{\Phi})}{(e^{-\Phi} - \frac{1}{3}\alpha_0 e^{\Phi})} \left| \frac{d\delta}{\delta} \right|. \quad (5.46)$$

Nesse ponto, consideramos $\delta > 0$, substituímos as Eqs. (5.30) e (5.38) em (5.46) e obtemos

$$N \approx \frac{3}{4} \int_{\Phi}^{\Phi_e} \frac{(1 - 2\delta - 2\delta_c^2 \delta^{-1})}{(\delta^2 - \delta_c^2)} d\delta.$$

Fazendo a substituição $x \equiv \frac{\delta_c}{\delta} \Rightarrow \delta = \delta_c x^{-1} \Rightarrow \delta^{-1} = x \delta_c^{-1}$, a diferencial será $d\delta = -\delta_c x^{-2} dx$. A seguir, fazemos essas substituições no numerador e no denominador da equação acima e obtemos:

$$N \approx \frac{3}{4\delta_c} \int_{\Phi_e}^{\Phi} \frac{x - 2\delta_c - 2x^2 \delta_c}{(1 - x^2) x} dx. \quad (5.47)$$

Para essa função de N *e-folds*, analisamos o intervalo em que a inflação ocorre. Pelo

argumento do espaço de fase sabemos que $\Phi \lesssim \Phi_c$, dito isso

$$\Phi \lesssim \Phi_c \Rightarrow -\Phi \gtrsim -\Phi_c \Rightarrow e^{-\Phi} \gtrsim e^{-\Phi_c} \Rightarrow \delta \gtrsim \delta_c$$

ou seja,

$$\boxed{\Phi \lesssim \Phi_c \Rightarrow \delta_c \lesssim \delta}. \quad (5.48)$$

Por outro lado, espera-se que o campo Φ seja positivo, pois ele é o campo escalar relacionado a ϕ , conforme a Eq. (5.14). Então:

$$\Phi > 0 \Rightarrow -\Phi < 0 \Rightarrow e^{-\Phi} < e^0 \Rightarrow \delta < 1,$$

juntando as extremidades, temos

$$\boxed{\Phi > 0 \Rightarrow \delta < 1}. \quad (5.49)$$

Reunimos a Eq. (5.48) em (5.49) e concluimos

$$0 < \Phi \lesssim \Phi_c \Rightarrow \delta_c \lesssim \delta < 1. \quad (5.50)$$

Vinculamos o resultado da Eq. (5.50) com a variável x ao lembrarmos da definição $x \equiv \frac{\delta_c}{\delta}$:

$$\frac{\delta_c}{\delta} \lesssim \frac{\delta}{\delta} \Rightarrow x \lesssim 1. \quad (5.51)$$

Assim, se estamos em um regime onde $\delta \ll 1$, e já analisamos que $\delta_c \lesssim \delta$, então $\delta_c \ll 1$.

Dito isso, reduzimos a Eq. (5.47):

$$N \approx \frac{3}{4\delta_c} \int \frac{dx}{(1-x^2)}$$

ou

$$N \approx \frac{3}{4\delta_c} \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)}.$$

Decompomos a equação acima em frações parciais e obtemos

$$\boxed{N \approx \frac{3}{8\delta_c} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C}, \quad (5.52)$$

sendo C a constante de integração. A seguir, tal constante será desprezada pois ela estaria vinculada a Φ_e e nesse regime $x_e \ll 1$.⁴⁵ Esta é a Eq. (33) da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022) e é o resultado principal desta seção. A seguir, determinamos como escrevemos o parâmetro δ em função do número de N *e-folds*.

Na Eq. (5.52), há uma divergência quando $x \rightarrow 1$. Isso implica que não podemos ter a igualdade entre δ e δ_c . Para voltarmos à variável δ , substituímos $x = \frac{\delta_c}{\delta}$ na Eq. (5.52), veja:

$$N \approx \frac{3}{8\delta_c} \ln \left(\frac{1 + \frac{\delta_c}{\delta}}{1 - \frac{\delta_c}{\delta}} \right)$$

e invertemos

$$\frac{8\delta_c N}{3} \approx \ln \left(\frac{\delta + \delta_c}{\delta - \delta_c} \right).$$

Aplicamos a exponenciação em ambos os lados e buscamos isolar δ para, eventualmente, substituí-lo nos parâmetros ε e η :

$$\delta = \delta_c \left[\frac{\exp\left(\frac{8\delta_c N}{3}\right) + 1}{\exp\left(\frac{8\delta_c N}{3}\right) - 1} \right]. \quad (5.53)$$

Portanto, vemos que a expressão acima mostra que o parâmetro δ depende diretamente tanto δ_c quanto de N .

5.7 Parâmetros ε e η escritos em função de N

Os próximos passos precisam ser seguidos para a obtenção de ε e η escritos em função de N , a fim de nos auxiliar na obtenção do *tilt* escalar e da razão tensorial-escalar. *A priori*, estamos interessados em entender o comportamento de $\dot{\Phi}(\Phi)$ e, para isso, vamos combinar a Eq. (3.14) com a equação de Friedmann, que serão apresentadas a seguir respectivamente.⁴⁶ Assim, se

$$3H\dot{\Phi} \approx -V'$$

⁴⁵Sabemos que, ao final da inflação, $\delta_c \ll \delta$, e x é definido como a razão entre esses termos. Após aplicar os limites de integração, obtemos $\approx \ln 1$, que é nulo, para o termo referente ao fim da inflação.

⁴⁶Na Subseção 3.4.2, já mostramos que a aproximação para a equação de Friedmann (3.20) é $H^2 \approx \frac{1}{3M^2} V$, o que altera sutilmente o resultado final da demonstração. A aproximação retratada nesta subseção utiliza as unidades de medida da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022).

e

$$H^2 \approx \frac{1}{2}V(\Phi), \quad (5.54)$$

então, fazemos a substituição da Eq. (5.54) na Eq. (3.14):

$$\dot{\Phi} \approx -\frac{V'}{3H}$$

e notamos que precisamos escrever $\dot{\Phi}$ em função de $1/H$. Portanto,

$$\dot{\Phi} \approx -\frac{V'}{3} \sqrt{\frac{2}{V}}. \quad (5.55)$$

Percebemos que podemos substituir as Eqs. (5.42) e (5.43) na expressão acima, resultando em

$$\dot{\Phi} \approx -\frac{2\sqrt{3\kappa_0}}{9} \left(\delta - \frac{1}{3}\alpha_0\delta^{-1} \right) \left(1 - 2\delta - \frac{2}{3}\alpha_0\delta^{-1} \right)^{-1/2}.$$

Sabendo que $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x \ll 1$, temos a expansão até primeira ordem de *slow-roll* para $\ddot{\Phi}$:

$$\dot{\Phi} \approx -\frac{2\sqrt{3\kappa_0}}{9} \left(\delta - \frac{1}{3}\alpha_0\delta^{-1} \right).$$

Lembramos da Eq. (5.38) e obtemos

$$\dot{\Phi} \approx -\frac{2\sqrt{3\kappa_0}}{9} (\delta - \delta_c^2\delta^{-1}) \quad (5.56)$$

como no resultado (27) da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022).

Vamos utilizar a Eq. (5.54), a variação temporal da equação de Friedmann⁴⁷

$$\dot{H} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 \right), \quad (5.57)$$

e também o potencial (5.42) e a variação temporal do campo, presente na Eq. (5.56), para calcular os parâmetros de *slow-roll*. Já que sabemos da definição, dada na Eq. (3.4), temos

$$\varepsilon \approx \frac{3}{2} \frac{\dot{\Phi}^2}{V(\Phi)}$$

⁴⁷A equação de Friedmann citada refere-se à Eq. (5.27). A variação temporal será obtida quando efetuada a substituição da equação de movimento do campo escalar na variação temporal do parâmetro de Hubble.

e então substituímos as Eqs. (5.42) e (5.56), na expressão acima, obtendo:

$$\varepsilon \approx \frac{4}{3} (\delta - \delta_c^2 \delta^{-1})^2 \left[1 + \left(-2\delta - \frac{2}{3} \alpha_0 \delta^{-1} \right) \right]^{-1},$$

para novamente utilizar a aproximação $(1+x)^n \approx 1+nx$, sendo $x \ll 1$. Deste modo, desconsideramos termos que tenham terceira ordem:

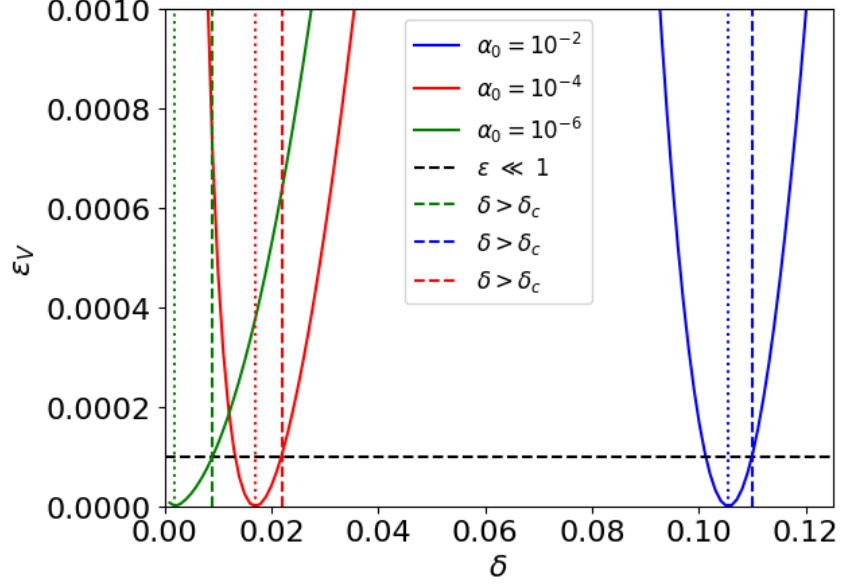
$$\boxed{\varepsilon \approx \frac{4}{3} (\delta - \delta_c^2 \delta^{-1})^2}. \quad (5.58)$$

Podemos estudar se a condição de *slow-roll* quando aplicada nesse modelo irá levar à um regime de *large-field* ou *small-field inflation*, através do comportamento do deslocamento do campo. Dito isso, aplicamos $\varepsilon \ll 1$ na Eq. (5.58), sabendo que δ_c obedece a Eq. (5.53).

Na Fig. 17 vemos o comportamento de três curvas diferentes para $\varepsilon_V(\phi)$, para diferentes valores de α_0 . Com a Eq. (5.58), notamos que $\varepsilon_V = 0$ quando $\delta = \delta_c$. Contudo, sabemos que a inflação ocorre para $\delta > \delta_c$ e essa afirmação respeita a condição de *slow-roll*, $\varepsilon_V \gg 1$. Por isso, afim de entender a relação entre ϕ e M_{Pl} , podemos determinar, com ajuda gráfica, se o deslocamento é *transplanckiano* ou *subplanckiano* nesse modelo. Numericamente foi possível calcular δ_c para cada α_0 , utilizando a equação $\delta_c = \left(4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}} \right)^{-1}$, e assim especificamos cada curva para ε . Considerando que δ de interesse é maior⁴⁸ do que o valor crítico, os resultados calculados são apresentados na Tab. 1.

⁴⁸O valor de δ_T para cada caso foi determinado a partir da intersecção entre a reta tracejada associada a cada curva — azul, vermelha e verde —, que incide sobre o eixo $\varepsilon = 0$, e a parábola correspondente.

Figura 17 – Gráfico do comportamento da função $\varepsilon_V(\phi)$ em função de δ para diferentes δ_c , que estão diretamente vinculados as correções α_0 . Definimos como δ_T os valores de δ que satisfazem a condição $\delta > \delta_c$; esses valores correspondem as linhas verticais tracejadas destacada em verde, vermelho e azul.



Fonte: Autora

Tabela 1 – Cálculo do deslocamento do campo *inflaton* para diferentes valores de α_0

α_0	δ_c	$\phi(\delta_c)/M_{\text{Pl}}$	δ_T	$\phi(\delta_T)/M_{\text{Pl}}$
10^{-2}	0,10	2,75	0,11	2,71
10^{-4}	0,017	4,98	0,0225	4,65
10^{-6}	0,0018	7,73	0,009	5,77

Fonte: Autora

Com os resultados que obtivemos, a última coluna da Tab. 1 mostra que $\phi(\delta_T) > M_{\text{Pl}}$ e, por isso, notamos que esse modelo está em um regime de *large-field*. Em outras palavras, a própria condição de *slow-roll* exige que o campo inicial esteja em valores *superplanckianos* e, com isso, o modelo cúbico está configurado como *swampland*.

Agora, precisamos calcular η , mas há uma sutileza nas definições deste termo em relação ao artigo (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022) e a Ref. (Baumann, 2022). Ou seja, na Eq. (3.5) o parâmetro é definido como positivo e agora definimos como

$$\eta \equiv -\frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon}. \quad (5.59)$$

Notamos que é necessário fazer

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

onde

$$\varepsilon = \varepsilon(\Phi(x, t)).$$

Com a Eq. (5.58) aplicamos a regra do produto e a regra da cadeia, e temos

$$\dot{\varepsilon} \approx -\frac{8}{3} (e^{-\Phi} - \delta_c^2 e^\Phi) (e^{-\Phi} + \delta_c^2 e^\Phi) \dot{\Phi}.$$

Lembrando da Eq. (5.56), a substituímos no resultado acima e obtemos:

$$\dot{\varepsilon} \approx \frac{16}{9} \sqrt{\frac{\kappa_0}{3}} (\delta - \delta_c^2 \delta^{-1})^2 (\delta + \delta_c^2 \delta^{-1}).$$

Além disso, para calcular a Eq. (5.59) precisamos do parâmetro de Hubble, por isso com a aproximação $H^2 \approx \frac{1}{2}V(\Phi)$, onde V é a Eq. (5.42), utilizamos a seguinte aproximação de Taylor

$$H \approx \sqrt{\frac{\kappa_0}{12} \left(1 - 2\delta - \frac{2}{3}\alpha_0 \delta^{-1}\right)} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa_0}{3}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(-2\delta - \frac{2}{3}\alpha_0 \delta^{-1}\right)\right],$$

logo

$$H \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa_0}{3}} \left[1 - \delta - \frac{1}{3}\alpha_0 \delta^{-1}\right].$$

Munidos desse resultado, substituímos a Eq. (5.7) na Eq. (5.59), aplicamos a propriedade distributiva e desconsideramos termos de segunda ordem, concluindo

$$\boxed{\eta \approx -\frac{8}{3} (\delta + \delta_c^2 \delta^{-1})}. \quad (5.60)$$

Por conseguinte, notamos a necessidade de substituir δ nas Eqs. (5.58) e (5.60). Iniciamos fazendo a seguinte definição

$$\Delta \equiv \frac{8\delta_c N}{3}. \quad (5.61)$$

que modificará a Eq. (5.53) da seguinte forma:

$$\frac{\delta}{\delta_c} = \left(\frac{e^\Delta + 1}{e^\Delta - 1}\right). \quad (5.62)$$

Assim, a Eq. (5.58) será:

$$\varepsilon \approx \frac{4}{3} \left[\delta_c \left(\frac{e^\Delta + 1}{e^\Delta - 1} \right) - \delta_c^2 \delta_c^{-1} \left(\frac{e^\Delta - 1}{e^\Delta + 1} \right) \right]^2, \quad (5.63)$$

colocamos δ_c em evidência, aplicamos o mínimo múltiplo comum e expandimos os devidos quadrados e concluímos, quando substituimos a Eq. (5.61)

$$\varepsilon \approx \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \frac{\exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{\left[1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)\right]^2}. \quad (5.64)$$

Estamos aptos a trabalhar com o termo η em (5.60) e para isso necessitamos trabalhar novamente com δ . Na Eq. (5.60) colocamos δ_c em evidência:

$$\eta \approx -\frac{8}{3} \delta_c \left(\frac{\delta}{\delta_c} + \delta^{-1} \delta_c \right) = -\frac{8}{3} \delta_c \left(\frac{\delta}{\delta_c} + \frac{1}{\frac{\delta}{\delta_c}} \right)$$

e usamos a Eq. (5.62):

$$\eta \approx -\frac{8}{3} \delta_c \left(\frac{e^\Delta + 1}{e^\Delta - 1} + \frac{1}{\frac{e^\Delta + 1}{e^\Delta - 1}} \right) \approx -\frac{8}{3} \delta_c \left[\frac{(e^\Delta + 1)^2 + (e^\Delta - 1)^2}{(e^\Delta - 1)(e^\Delta + 1)} \right]$$

portanto desenvolvendo os quadrados e fazendo a multiplicação dos termos no denominador do resultado anterior, temos

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \left[\frac{1 + e^{2\Delta}}{1 - e^{2\Delta}} \right].$$

ou

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \left[\frac{1 + \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)} \right]. \quad (5.65)$$

Portanto, agora estamos aptos a determinar a conexão com as observações cosmológicas pois estamos munidos das Eqs. (5.64) e (5.65).

5.8 Parâmetros cosmológicos

Para finalizar o capítulo, calculamos o parâmetro cosmológico índice espectral escalar (ou *tilt* escalar) n_s e a razão tensorial-escalar r . Conhecemos os resultados⁴⁹

$$n_s - 1 \equiv -2\varepsilon + \eta \quad \text{e} \quad r = 16\varepsilon. \quad (5.66)$$

Por isso, podemos substituir as Eqs. (5.64) e (5.65) na expressão para n_s , veja:

$$n_s - 1 \approx -\frac{1}{3}\delta_c \left\{ 4^3 2\delta_c \frac{\exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{\left[1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)\right]^2} + 16 \left[\frac{1 + \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)} \right] \right\}.$$

Se $\delta_c N \ll 1$,⁵⁰ então temos, pela expansão em Taylor da função exponencial a aproximações, tanto para ε quanto para η :⁵¹

$$\varepsilon \approx \frac{3}{4N^2} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{16\delta_c N}{3} \right)^2 \right] \quad (5.67)$$

e

$$\eta \approx -\frac{2}{N} \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{16\delta_c N}{3} \right)^2 \right]. \quad (5.68)$$

Assim, substituímos (5.67) e (5.68) na equação para n_s dada em (5.66):

$$n_s - 1 \approx -\frac{2}{N} - \frac{3}{2N^2} + \delta_c^2 \left(\frac{32}{9} - \frac{128N}{27} \right).$$

Notamos que o primeiro termo é justamente o resultado do modelo de Starobinsky, dado na Eq. (4.34), e os outros termos são correções provenientes do modelo $R + R^2 + R^3$.

⁴⁹A equação para n_s pode ser encontrada na Eq. (8.83) da Ref. (Baumann, 2022) e a equação para r pode ser encontrada na Eq. (4.10) da Ref. (Linde, 2007) e também na Eq. (10.2.16) da Ref. (Weinberg, 2008). Contudo, como definimos o parâmetro η como negativo, na Eq. (5.59) aqui vamos ajustar o sinal que está acompanhado dele para positivo.

⁵⁰Em (5.51), justificamos $\delta_c \lesssim \delta < 1$ como caso limite $\Phi \lesssim \Phi_c$. Similarmente, em uma situação em que $\Phi \ll \Phi_c$, teremos $\delta_c \ll \delta < 1$ ou seja, δ_c é bastante pequeno. Para um N finito (e da ordem de 50 à 60), a multiplicação N por δ_c continuará dando como resultado um número pequeno. Com isso, podemos assumir $\delta_c N \ll 1$.

⁵¹A demonstração desses resultados está no Apêndice D.

Podemos expressar esse resultado em função da correção α_0 , já que⁵²

$$\delta_c = \frac{1}{4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}}}. \quad (5.69)$$

Agora, vamos analisar a razão tensorial-escalar. Seja $r = 16\varepsilon$. Com a aproximação (5.67), temos:

$$r \approx \frac{12}{N^2} - \frac{256\delta_c^2}{9}.$$

Notamos que quando $\alpha_0 \rightarrow 0$, temos $\delta_c \approx 0$, recuperando o resultado de Starobinsky, visto na Eq. (4.35).

Ademais, na Tab. 2, temos numericamente os dados de n_s e r . Vemos que para $\alpha_0 \leq 10^{-4}$, o índice espectral n_s assume valores próximos a 0,96, especialmente para $N = 60$, o que o torna compatível com as observações do Planck 2018 (Planck Collaboration, 2018). Além disso, a razão tensorial-escalar r é muito pequena, com valores da ordem de 10^{-3} , bem abaixo do limite imposto pelo BICEP/Keck 2021 ($r_{0,05} < 0,036$) (Ade *et al.*, 2021). No geral, a tabela sugere que o modelo que adiciona o termo cúbico se mantém dentro das restrições observacionais para $\alpha_0 \leq 10^{-4}$, com $N = 60$ sendo a escolha mais favorável.

Tabela 2 – Resultados numéricos para os parâmetros n_s e r , conforme a variação de α_0 , para $N = 50$ e $N = 60$

α_0	$N = 50$		$N = 60$	
	n_s	r	n_s	r
10^{-4}	0,9520	0,0039	0,9573	0,0024
10^{-5}	0,9586	0,0047	0,9653	0,0032
10^{-6}	0,9593	0,0048	0,9662	0,0033

Fonte: Autora

Concluimos que a extensão para incluir o termo R^3 apresenta um deslocamento *transplanckiano*, segundo a Fig. 12 e também pelos resultados numéricos obtidos na Tab. 1.

Uma eventual detecção de ondas gravitacionais primordiais com razão tensorial-escalar $r \geq 0,003$ situaria modelos inflacionários do tipo *large-field*, como o de Starobinsky e extensões que incluem termos cúbicos em R^3 , na região de interesse observacional dos

⁵²A Eq. (5.69) vem da substituição de $\Phi_c = \ln\left(4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}}\right)$ na própria definição $\delta_c \equiv e^{-\Phi_c}$.

experimentos de próxima geração, como o CMB-S4 (Abazajian *et al.*, 2019). No entanto, esses modelos frequentemente implicam deslocamentos *transplanckianos* do campo *inflaton* ($\Delta\phi \gg M_{\text{Pl}}$), como já observamos nos resultados desse capítulo e do Cap. 4, característica que entra em tensão com as conjecturas do *swampland* (Obied *et al.*, 2018). Uma detecção futura de $r \sim 0,003$ não invalidaria a teoria de cordas em si, mas exigiria ajustes conceituais nessas conjecturas ou uma reinterpretação de como a inflação pode emergir de teorias fundamentais, reforçando a relevância de testes observacionais para restringir ideias sobre gravidade quântica.

6 CONCLUSÕES

Iniciamos este trabalho com uma breve introdução da Cosmologia Padrão. Comentamos sobre o Modelo Padrão da Cosmologia (MCP) que assume a validade do Princípio Cosmológico (PC) e que agrega o fato do Universo estar expandindo; esse fato é matematicamente representado pela evolução do fator de escala $a(t)$. Começamos o Capítulo 2 definindo as possíveis curvaturas das fatias espaciais para um espaço homogêneo e isotrópico, sendo elas $k = 0$, -1 e $k = +1$. Definimos também o elemento de linha para a métrica que respeita as condições do PC conhecida como métrica FLRW. Com o estudo da dinâmica das galáxias, introduzimos o parâmetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$. Com a conservação de energia via derivada covariante do tensor energia-momento ($\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0$), determinamos a equação de continuidade. Na mesma seção, estudamos a relação entre a densidade de energia ρ , fator de escala $a(t)$ e a equação de estado w . Com o tensor de Einstein e os símbolos de Christoffel necessários para escrever o tensor de Ricci, foi possível determinar as equações que regem a evolução do Universo, denominadas equações de Friedmann. Finalizamos o Capítulo 2 obtendo as soluções exatas para as equações diferenciais de $a(t)$ vinculada a cada componente (matéria, radiação e constante cosmológica), separadamente.

No Capítulo 3, comentamos brevemente sobre os problemas teóricos do MPC - problema do horizonte, problema da planura e problema das correlações no superhorizonte, definimos o horizonte de partículas, d_h , e o raio comóvel de Hubble, $(aH)^{-1}$. Analisamos com algumas figuras como seria possível resolver os problemas mencionados se contraíssemos o raio $(aH)^{-1}$ conforme a evolução do tempo. Definimos, fundamentalmente, a inflação como uma fase de expansão em que a esfera de Hubble diminui, ou seja, $\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0$. Com $aH = \dot{a}$ há a implicação $\ddot{a} > 0$ e isto resulta em um período de expansão acelerada. Introduzimos, na física da inflação, os parâmetros de *slow-roll* de Hubble ε e η .

O parâmetro ε mede o comportamento da variação fracionária do potencial do campo *inflaton*, durante a inflação cósmica. Já o parâmetro η está relacionado a variação da variação do potencial do *inflaton*, e como tal, está associado a duração do processo dinâmico do campo. Ambos, ε e η caracterizam a dinâmica inflacionária por meio das condições de *slow-roll*, garantindo uma expansão acelerada e prolongada, capaz de re-

resolver os problemas do horizonte — explicando a correlação entre regiões causalmente desconectadas na radiação cósmica de fundo (RCF) — e da planura (Liddle; Lyth, 2000).

A duração necessária da inflação é quantificada pelo número de *e-folds*, N , sendo os últimos 50 a 60 *e-folds* particularmente críticos, pois correspondem ao período da inflação física: é nesse intervalo que a escala de referência observacional (como o modo $k_{0,05}$, utilizado nas análises da RCF (Planck Collaboration, 2018) cruza o horizonte inflacionário e origina as flutuações primordiais observáveis (Baumann, 2012). Esse período é denominado “físico” por estar diretamente vinculado às escalas cosmológicas acessíveis atualmente, enquanto os *e-folds* anteriores geram flutuações em escalas tão grandes que permanecem além do horizonte observável.

O vínculo entre N , a escala pivot e os parâmetros do modelo inflacionário é, portanto, essencial para a correta reprodução, pelo modelo, das anisotropias da RCF e da geometria plana do universo (Baumann, 2012; Liddle; Lyth, 2000; Planck Collaboration, 2018).

Para que as condições de *slow-roll* se satisfaçam, o parâmetro ε e a aceleração adimensional δ devem ser $\varepsilon, \delta \ll 1$. Adiante, a dinâmica do campo escalar ϕ , responsável por tal expansão acelerada, foi analisada e a equação de movimento foi derivada a partir da equação de Klein-Gordon ao especificarmos a métrica FLRW. Na Subseção 3.4.2, aplicamos as condições $\varepsilon, \delta \ll 1$ na primeira equação de Friedmann e na equação de movimento do campo escalar ϕ resultando nas aproximações $\dot{\phi}^2 \ll V$ e $3H\dot{\phi} \ll -\frac{dV}{d\phi}$, respectivamente. Isto permitiu a escrita dos parâmetros ε e η somente em termos do potencial $V(\phi)$. O que é conveniente pois, com algumas transformações de *frame* na ação proposta para o modelo de Starobinsky, o potencial associado surge naturalmente, como foi visto nos Capítulos 4 e 5.

Ainda no Capítulo 3, foi demonstrado como o número de *e-folds* que o espaço sofreu vincula-se ao parâmetro ε_V . Este parâmetro por sua vez tem denominação de N *e-folds* e faz conexão com as observações cosmológicas através do espectro de potência da RCF e o número de onda k associado à flutuação de densidade. Antes de finalizar o Capítulo 3, fazemos o estudo de um potencial *ad hoc* intitulado como inflação quadrática. No caso da inflação quadrática, temos o potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ e, para ele, obtivemos $\varepsilon_V \approx \eta_V = \frac{1}{2N_*}$. Sabemos que as observações sugerem um intervalo $50 < N_* < 60$. Assumindo $N_* \sim 50$, o resultado foi $\varepsilon_V \approx \eta_V = 0,01$. O parâmetro cosmológico n_s

(índice espectral escalar) resultante foi $n_s \approx 1 - \frac{2}{N_*} \approx 0,96$, o qual está em acordo com o vínculo fornecido pela Ref. (Planck Collaboration, 2018), $n_s \approx 0,965 \pm 0,004$, e que como mostrado na Ref. (Baumann, 2012), pode ser calculado fazendo $n_s - 1 \approx -6\varepsilon_V + 2\eta_V$. A razão tensorial-escalar, definida como $r \equiv A_t/A_s$ e remanejada para $r \approx 16\varepsilon_V$, para esse modelo foi obtida sendo $r \approx 0,016$ e está acima do limite superior $r < 0,036$ fornecido pela Ref. (Ade *et al.*, 2021). Por fim, concluímos que este modelo é descartado devido os resultados apresentados e também conforme as observações da RCF discutidas na Ref. (Baumann, 2022).

Iniciamos o Capítulo 4 comentando a motivação de Starobinsky em adicionar termos extra de curvatura na ação de gravitação, uma vez que a teoria da Relatividade Geral é não renormalizável (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022). Assim, a proposta foi adicionar um termo quadrático, como termo de correção, na ação de Einstein-Hilbert, resultando em $S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{\alpha}{2M_{\text{Pl}}^2} R^2 \right)$. O potencial sofreu uma transformação para o *frame* de Jordan a partir de um multiplicador de Lagrange e a associação a um campo escalar auxiliar χ . Posteriormente, foi aplicada uma transformação conforme para o *frame* de Einstein através da alteração da métrica via $\tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^2 g^{\mu\nu}$. Com esse passo, o potencial $V(\phi) = \frac{M_{\text{Pl}}^4}{4\alpha} \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) \right]^2$ foi obtido. Dado esse resultado, foi possível obter os parâmetros ε_V e η_V . Quando aplicamos a condição $\varepsilon \ll 1$ obtivemos a restrição $\phi \gg 0,94M_{\text{Pl}}$, a qual classificou o modelo como *large-field*. Ademais, também foi possível escrever os parâmetros de *slow-roll* em termos de N_* *e-folds* associado ao número de onda de referência k_* , isto é, $\varepsilon_V \approx \frac{3}{4} \frac{1}{N_*^2}$ e $\eta_V \approx -\frac{1}{N_*}$. Neste modelo, concluímos $n_s - 1 \approx -\frac{2}{N_*}$, assim como para a inflação quadrática. Assumindo $N_* \sim 50$, também temos o mesmo resultado $n_s \approx 0,96$. Todavia, para a razão $r \equiv A_t/A_s$, o resultado foi $r \approx 0,0048$. Por isso, o modelo de Starobinsky é favorecido pelas observações. Mostramos que com a amplitude escalar $A_s \approx 2 \times 10^{-9}$ observada em espectros de potência da RCF, o fator de correção deve valer $\alpha \approx 2 \times 10^9$. Finalizamos o capítulo indicando motivações para adicionar termos de correções na ação de Starobinsky, uma vez que esse modelo apresenta dificuldades de se conectar naturalmente com teorias mais fundamentais, pelo fato de apresentar um deslocamento *transplanckiano*.

Assim, com essa problemática, fica em aberto a possibilidade de adicionar outros termos de correção, o que fazemos no Capítulo 5 adicionando $\frac{\alpha_0}{24M^2} R^3$ na ação de Starobinsky, onde α_0 é um parâmetro adimensional (note que estamos utilizando outra unidade

de medida para a escala de energia). O mesmo receituário de transformações foi aplicado e o potencial resultante foi a Eq. (5.12). Neste potencial, há a restrição na correção ao modelo de Starobinsky para $0 < \alpha_0 < 1/4$. Realizamos análises para diferentes comportamentos deste potencial utilizando $\alpha_0 = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$. Com esses valores escolhidos, encontramos os valores críticos do potencial sendo $\Phi_c = 3,06, \Phi_c = 5,18$ e $\Phi_c = 7,46$, respectivamente, quando fizemos $\frac{dV}{d\phi} = 0$, para $\alpha_0 = 10^{-2}$.

Na Fig. 13, observamos que a curva de Starobinsky tende assintoticamente a $\varepsilon_V = 0$ para valores grandes de ϕ . Para qualquer $\alpha_0 \neq 0$ todas as curvas tendem a $\varepsilon_V = 1/12$, quando $\phi \rightarrow \infty$. Esse resultado nos permitiu entender que o fator de escala desse modelo apresenta comportamento de lei de potência $a \sim t^{12}$ e indica uma expansão muito rápida e permanente, que não permite uma transição natural para a era de radiação. Isso mostra que, se as condições iniciais não estiverem suficientemente próximas do ponto crítico $(\Phi_c, 0)$, o Universo pode evoluir para uma inflação não física — ou seja, uma inflação que não se conecta com o modelo de Big Bang. Por isso, a presença desse ponto crítico limita quais condições iniciais levam a uma inflação cosmologicamente viável e esse ponto crítico depende diretamente da correção α_0 . À medida que α_0 se aproxima de zero (ou seja, as correções se tornam cada vez menores), observamos que as curvas se estendem por um intervalo maior de ϕ , mantendo $\varepsilon_V \simeq 0$. A exemplo, isso acontece para $\alpha_0 = 10^{-6}$ no intervalo $2 \lesssim \phi \lesssim 15$, enquanto para $\alpha_0 = 10^{-2}$ isso ocorre no intervalo $2 \lesssim \phi \lesssim 4$.

Há uma tendência de η_V de todas as curvas com $\alpha_0 \neq 0$ convergirem para o mesmo valor à medida que $\phi \rightarrow \infty$. Neste caso, aproximam-se de $\eta_V = 1/6$. A curva de $\alpha_0 = 10^{-2}$, que apresenta maior correção, não segue a superposição com as demais curvas, contudo é a correção que cruza o valor de zero para um maior valor de ϕ . Nesse contexto, observam-se valores negativos de η_V no intervalo $1 \lesssim \phi \lesssim 5$, com um mínimo $\eta \approx -0,37$. Para outros valores de α_0 , o mínimo se sobrepõe em torno de $\eta_V \approx -0,33$, incluindo o modelo de Starobinsky. Além disso, conforme α_0 diminui, os intervalos de ϕ em que $\eta_V \simeq 0$ tornam-se maiores. Ainda nesse capítulo, analisamos o comportamento de ambos os parâmetros importantes para a inflação em um único gráfico para entender em qual circunstância ocorre simultaneamente $\varepsilon_V \ll 1$ e $\eta_V \ll 1$ e concluímos que isto acontece no intervalo $0 \lesssim \phi \lesssim 5$. Este intervalo é o mesmo que obtivemos ao analisar o espaço de fase desse modelo (vide Fig. 16) em relação a duração da inflação.

A Tab. 1 permitiu concluirmos numericamente que esse modelo caracteriza-se

como *large-field* e com a Fig. 12 vemos isso graficamente. Dito isso, concluímos que a extensão que propomos também sofre com o problema de não conseguir relacionar-se com teorias mais fundamentais de maneira elegante. Ademais, com aproximações de ε e η , configurando o regime $\delta_c N \ll 1$, a conexão com as observações cosmológicas resulta em $n_s - 1 \approx -\frac{2}{N} - \frac{3}{2N^2} + \delta_c^2 \left(\frac{32}{9} - \frac{128N}{27} \right)$, onde $\delta_c = \frac{1}{4 + \sqrt{\frac{3}{\alpha_0}}}$.

Com a Tab. 2, vemos os resultados numéricos dos parâmetros n_s e r quando escolhemos diferentes valores de α_0 e também quando variamos para $N = 50$ e $N = 60$. Para $N = 60$, $\alpha_0 = 10^{-5}$ e $\alpha_0 = 10^{-6}$, os resultados para n_s são os mais próximos a $n_s = 0,965 \pm 0,004$, segundo a Ref.(Planck Collaboration, 2018). Essas correções apresentam, respectivamente, $r \approx 0,0032$ e $r \approx 0,0033$. Tais valores estão abaixo do limite observacional e segundo os resultados esperados pelo projeto CMB-S4 (CMB-S4 Collaboration, 2020), caso as ondas gravitacionais sejam detectadas, essa razão deve ser $r > 0,003$.

Concluímos que a adição de R^3 é um caminho para refinar o modelo de Starobinsky.

REFERÊNCIAS

- ABAZAJIAN, K. N. *et al.* CMB-S4 Science Case, Reference Design, and Project Plan. **arXiv:1907.04473**, jul. 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1907.04473>. Acesso em: 1 abr. 2025.
- ADE, P. A. R. *et al.* Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation. **Astronomy & Astrophysics**, v. 571, p. A22, fev. 2015. DOI: 10.1051/0004-6361/201321569. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1303.5082.pdf>. Acesso em: 25 maio 2024.
- ADE, P. A. R. *et al.* (BICEP2, Planck Collaboration). A Joint Analysis of BICEP2/Keck Array and Planck Data. **Physical Review Letters**, v. 114, p. 101301, abr. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.101301. arXiv: 1502.00612. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1502.00612>. Acesso em: 25 maio 2024.
- ADE, P. A. R. *et al.* (BICEP, Keck Collaboration). BICEP / Keck XIII: Improved Constraints on Primordial Gravitational Waves using Planck, WMAP, and BICEP/Keck Observations through the 2018 Observing Season. **Physical Review Letters**, v. 127, n. 15, p. 151301, out. 2021. DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.151301. arXiv: 2110.00483. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2110.00483>. Acesso em: 25 maio 2024.
- ASHTEKAR, A.; SINGH, P. Loop Quantum Cosmology: A Status Report. **Classical and Quantum Gravity**, v. 28, n. 21, nov. 2011. DOI: 10.1088/0264-9381/28/21/213001. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1108.0893.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2025.
- BAUMANN, D. TASI lectures on inflation. **arXiv:0907.5424**, nov. 2012. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0907.5424.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2024.
- BAUMANN, D.; MCALLISTER, L. **Inflation and String Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
- BAUMANN, D. **Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

BECKER, K.; BECKER, M.; SCHWARZ, J. H. **String Theory and M-Theory: A Modern Introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-86069-7.

BEZERRA-SOBRINHO, J.; MEDEIROS, L. G. Modified Starobinsky inflation by the $R \ln(\square)R$ term. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 01, p. 039, jan. 2023. DOI: 10.1088/1475-7516/2023/01/039. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2202.13308>. Acesso em: 27 mar. 2025.

BEZRUKOV, F. L.; SHAPOSHNIKOV, M. E. The Standard Model Higgs boson as the inflaton. **Physics Letters B**, out. 2008. DOI: 10.1016/j.physletb.2007.11.072. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0710.3755>. Acesso em: 19 jan. 2025.

BIANCHI, L. Sui simboli a quattro indici e sulla curvatura di Riemann. **Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei**, v. 11, n. 5, p. 4-7, jan. 1902. Disponível em: <http://operedigitali.lincoln.it/rendicontiFMN/rol/pdf/S5V11T1A1902P37.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2024.

BUCHER, M.; NI, W. **One Hundred Years of General Relativity: From Genesis and Empirical Foundations to Gravitational Waves, Cosmology and Quantum Gravity**. Singapura: World Scientific, 2017.

CAPOZZIELLO, S.; DE LAURENTIS, M. Extended Theories of Gravity. **Physics Reports**, v. 509, n. 4-5, p. 167-321, set. 2011. DOI: 10.1016/j.physrep.2011.09.003. arXiv: 1108.6266. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1108.6266>. Acesso em: 3 abr. 2025.

CARROLL, S. M. *et al.* Is Cosmic Speed-Up Due to New Gravitational Physics? **Physical Review D**, v. 70, p. 043528, ago. 2004. DOI: 10.1103/PhysRevD.70.043528. arXiv: astro-ph/0306438. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0306438>. Acesso em: 5 abr. 2025.

CARROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. **Introduction to Modern Astrophysics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

CMB-S4 COLLABORATION. CMB-S4: Forecasting Constraints on Primordial Gravitational Waves. **arXiv:2008.12619**, ago. 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2008.12619>. Acesso em: 3 abr. 2025.

CUZINATTO, R. R. **Notas de Aula de Relatividade Geral**. Poços de Caldas: Material não publicado, 2014. Disponível por comunicação pessoal com o autor (rodrigo.cuzinato@unifal-mg.edu.br). Acesso em: 22 ago. 2024.

CUZINATTO, R. R.; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. Higher-order modified Starobinsky inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, jan. 2019. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/02/055. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1810.08911>. Acesso em: 6 set. 2024.

CUZINATTO, R. R.; MEDEIROS, L. G. Inflationary dynamics in modified gravity models. **arXiv:2404.11904**, abr. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2404.11904.pdf>. Acesso em: 3 out. 2024.

DAHMEN, S. R. **Relatividade Geral: Teoria e aplicações**. Notas de aula da UFRGS, nov. 2022. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/dahmen/DahmenRelatividadeGeral.pdf>. Acesso em: 4 ago. 2024.

DEBONO, I.; SMOOT, G. F. General Relativity and Cosmology: Unsolved Questions and Future Directions. **Universe**, set. 2016. arXiv: 1609.09781.

DODELSON, S. **Modern Cosmology**. San Diego: Academic Press, 2003.

DOLGOV, A. D.; KAWASAKI, M. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? **Physics Letters B**, v. 573, p. 1-4, out. 2003. DOI: 10.1016/j.physletb.2003.08.039. arXiv: astro-ph/0307285. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0307285>. Acesso em: 4 abr. 2025.

EINSTEIN, A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie: Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. **Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 142-152, fev. 1917. Disponível em: <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol6-trans/433>. Acesso em: 4 ago. 2024.

FARAONI, V.; GUNZIG, E.; NARDONE, P. Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology. **Fundamentals of Cosmic Physics**, v. 20, p. 121, nov. 1998. arXiv: gr-qc/9811047. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9811047.pdf>. Acesso em: 20 maio 2024.

FARAONI, V. The Stability of modified gravity models. **Physical Review D**, v. 72, p. 124005, dez. 2005. DOI: 10.1103/PhysRevD.72.124005. arXiv: gr-qc/0511094. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0511094>. Acesso em: 4 abr. 2025.

FELICE, A. D.; TSUJIKAWA, S. $f(R)$ theories. **Living Reviews in Relativity**, v. 13, n. 1, p. 3, jun. 2010. DOI: 10.12942/lrr-2010-3. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1002.4928>. Acesso em: 6 abr. 2025.

FLEMING, H. **Coordenadas esféricas**. São Paulo: USP, ago. 2003. Disponível em: <http://fma.if.usp.br/fleming/diffeo/node4.html>. Acesso em: 20 jun. 2024.

FLEMING, H. **O teorema de Noether**. São Paulo: USP, set. 2002. Disponível em: <http://www.fma.if.usp.br/fleming/noether/node2.html>. Acesso em: 30 jul. 2024.

FREESE, K.; FRIEMAN, J. A.; OLINTO, A. V. Natural inflation with pseudo Nambu-Goldstone bosons. **Physical Review Letters**, ago. 1990. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/299254>. Acesso em: 19 jan. 2025. DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.3233.

GERMAN, G.; GONZALEZ, Q. R.; COLORADO, A. M. M. Model independent bounds for the number of e-folds during the evolution of the universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 03, p. 004, fev. 2023. DOI: 10.1088/1475-7516/2023/03/004. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2212.03730>. Acesso em: 20 jul. 2024.

GOTTLÖBER, S.; MÜLLER, V.; STAROBINSKY, A. A. Analysis of inflation driven by a scalar field and a curvature-squared term. **Physical Review D**, v. 43, p. 2510-2515, abr. 1991. DOI: 10.1103/PhysRevD.43.2510. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/302508>. Acesso em: 19 jan. 2025.

GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, v. 23, n. 2, p.

347-356, jul. 1980. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347. Disponível em:
<https://inspirehep.net/files/0ecbb01e927458f213e0e9362eeb16f9>. Acesso em: 10
 fev. 2024.

HIROSI, O. *et al.* Distance and de Sitter Conjectures on the Swampland. **Physics Letters B**, v. 788, p. 180-184, out. 2019. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.11.018. arXiv: 1810.05506. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1810.05506>. Acesso em: 15 mar. 2025.

HOOFT, G.; VELTMAN, M. J. G. One-loop divergencies in the theory of gravitation. **Annales de l'I. H. P., section A**, tome 20, n. 1, jan. 1974. Disponível em:
http://www.numdam.org/article/AIHPA_1974_20_1690.pdf.

ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. **Quantum Field Theory**. New York: International Series In Pure and Applied Physics, 1980.

IVANOV, M. M.; TOKAREVA, A. A. Cosmology with a light ghost. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, dez. 2016. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/12/018. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1610.05330>. Acesso em: 13 mar. 2025.

KALLOSH, R.; LINDE, A. Superconformal generalizations of the Starobinsky model. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2013, n. 06, p. 028, jun. 2013. DOI: 10.1088/1475-7516/2013/06/028. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1306.3214>. Acesso em: 7 abr. 2025.

KALLOSH, R.; LINDE, A.; YAMADA, Y. Planck 2018 and Brane Inflation Revisited. **Journal of High Energy Physics**, v. 01, p. 008, nov. 2019. DOI: 10.1007/JHEP01(2020)013. arXiv: 1901.05289. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1811.01023>. Acesso em: 25 out. 2024.

LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. **Cosmological Inflation and Large-Scale Structure**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

LINDE, A. Chaotic Inflation. **Physics Letters B**, jun. 1983. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90837-7. Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0370269383908377>. Acesso em: 18 jan. 2025.

LINDE, A. D. Particle physics and inflationary cosmology. **Contemporary Concepts in Physics**, v. 5, mar. 1990. arXiv: hep-th/0503203. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0503203>. Acesso em: 22 out. 2024.

LINDE, A. Hybrid Inflation. **Physical Review D**, v. 49, p. 748, set. 1993. DOI: 10.1103/PhysRevD.49.748. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9307002>. Acesso em: 8 nov. 2024.

LINDE, A. D. Prospects of Inflation. **Physica Scripta T**, v. 117, p. 40-48, fev. 2004. DOI: 10.1238/Physica.Topical.117a00040. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0402051.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2024.

LINDE, A. Inflationary Cosmology. **Lecture Notes in Physics**, v. 738, p. 1-54, maio 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-74353-8₁. arXiv: 0705.0164. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0705.0164>. Acesso em: 12 jun. 2024.

LYTH, D. H. Models of inflation and the spectral index of the density perturbation. **arXiv:hep-ph/9609431**, set. 1996. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/9609431.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2024.

LYTH, D. H. What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy? **Physical Review Letters**, v. 78, p. 1861-1863, mar. 1997. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.1861. arXiv: hep-ph/9606387. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-ph/9606387>. Acesso em: 22 mar. 2025.

LYTH, D. H.; LIDDLE, A. R. **The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

MARTIN, J.; RINGEVAL, C.; VENNIN, V. Encyclopædia Inflationaris. **Physics of the Dark Universe**, dez. 2014. DOI: 10.1016/j.dark.2014.01.003. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1303.3787>. Acesso em: 18 jan. 2025.

MUKHANOV, V. F.; CHIBISOV, G. V. Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe. **JETP Letters**, v. 33, p. 532-535, abr. 1981. Disponível em: <http://jetpletters.ru/ps/1510/article23079.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2024.

- MYRZAKULOV, R.; ODINTSOV, S.; SEBASTIANI, L. Inflationary universe from higher-derivative quantum gravity. **Physical Review D**, v. 91, p. 083529, abr. 2015. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.083529. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1412.1073>. Acesso em: 19 jan. 2025.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Modified $f(R)$ gravity consistent with realistic cosmology: From matter dominated epoch to dark energy universe. **Physical Review D**, v. 74, p. 086005, out. 2006. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.086005. arXiv: hep-th/0608008. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0608008>. Acesso em: 5 abr. 2025.
- OBIED, G. *et al.* De Sitter Space and the Swampland. **arXiv:1806.08362**, jul. 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1806.08362>. Acesso em: 6 abr. 2025.
- PALTI, E. The Swampland: Introduction and Review. **Fortschritte der Physik**, v. 67, n. 6, p. 1900037, jun. 2019. DOI: 10.1002/prop.201900037. arXiv: 1903.06239. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1903.06239>. Acesso em: 23 mar. 2025.
- PEARSON, J. **Generalized perturbations in modified gravity and dark energy**. 2012. Tese (Doutorado) - University of Manchester, jun. 2012. DOI: 10.1007/978-3-319-01210-0. Disponível em: <https://inspirehep.net/files/338b10732b165ac078af0f80f07df914>. Acesso em: 20 maio 2024.
- PEEBLES, P. J. E. **The Large-Scale Structure of the Universe**. Princeton: Princeton University Press, 1980.
- PEEBLES, P. J. E. **Principles of Physical Cosmology**. Princeton: Princeton University Press, 1993.
- PERLMUTTER, S. *et al.* Measurement of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. **The Astrophysical Journal**, dez. 1998. DOI: 10.1086/307221. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9812133.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2024.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. Reading, USA: Addison-Wesley, 2019.
- PLANCK COLLABORATION. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. **Astronomy & Astrophysics**, ago. 2019. DOI: 10.1051/0004-6361/201833887. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1807.06211.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2024.

PLANCK COLLABORATION. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, v. 641, p. A6, set. 2020. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1807.06209.pdf>. Acesso em: 4 abr. 2024. [Erratum: *Astron.Astrophys.* 652, C4 (2021)].

RODRIGUES-DA-SILVA, G.; BEZERRA-SOBRINHO, J.; MEDEIROS, L. G. Higher-order extension of Starobinsky inflation: Initial conditions, slow-roll regime, and reheating phase. **Physical Review D**, v. 105, n. 063504, mar. 2022. DOI: 10.1103/PhysRevD.105.063504. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2110.15502>. Acesso em: 14 out. 2024.

RIESS, A. *et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. **The Astronomical Journal**, maio 1998. DOI: 10.1086/300499. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/9805201.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2024.

RYDEN, B. **Introduction to Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

RYDER, L. **Introduction to General Relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

SAINI, S.; NAUTIYAL, A. Exploring generalized Starobinsky model of inflation: Observational constraints. **arXiv:2502.04401**, fev. 2025. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/2502.04401>. Acesso em: 3 abr. 2025.

SALVIO, A. Inflationary perturbations in no-scale theories. **European Physical Journal C**, maio 2017. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4825-6. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1703.08012>. Acesso em: 6 set. 2024.

SCHWARTZ, M. D. **Quantum Field Theory and the Standard Model**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. $f(R)$ Theories Of Gravity. **Reviews of Modern Physics**, v. 82, p. 451-497, jun. 2010. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.451. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/0805.1726.pdf>. Acesso em: 20 maio 2024.

STAROBINSKY, A. A. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. **JETP Letters**, v. 30, p. 682-685, dez. 1979. Disponível em: http://jetpletters.ru/ps/1370/article_20738.pdf. Acesso em: 27 mar. 2025.

STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularities. **Physics Letters B**, v. 91, p. 99-102, out. 1980. DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/157872>. Acesso em: 27 mar. 2025.

STAROBINSKY, A. A. **Nonsingular Model of the Universe with the Quantum-Gravitational de Sitter Stage and its Observational Consequences**. In: QUANTUM GRAVITY. New York: Springer US, 1984. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2701-1_8.

STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. **Physical Review D**, v. 16, n. 4, p. 953-969, ago. 1977. DOI: 10.1103/PhysRevD.16.953.

VAFA, C. The String Landscape and the Swampland. **International Journal of Modern Physics D**, v. 15, n. 10, p. 1947-1951, out. 2006. arXiv: hep-th/0509212. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0509212.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2025.

VILENKIN, A. Classical and quantum cosmology of the Starobinsky inflationary model. **Physical Review D**, v. 32, n. 10, p. 2511-2520, fev. 1985. DOI: 10.1103/PhysRevD.32.2511. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/213278>. Acesso em: 27 mar. 2025.

WALD, R. M. **General Relativity**. Chicago: Chicago University Press, 1984.

WANDS, D. Multiple field inflation. **Lecture Notes in Physics**, v. 738, p. 275-304, fev. 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-74353-8_8. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0702187>. Acesso em: 4 nov. 2024.

WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

WEINBERG, S. **Cosmology**. Oxford: Oxford University Press, 2008.

WOODARD, R. P. Avoiding dark energy with $1/R$ modifications of gravity. **Lecture Notes in Physics**, v. 720, p. 403-433, jan. 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-71013-4_4.

arXiv: astro-ph/0601672. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0601672>.

Acesso em: 5 abr. 2025.

ZEE, A. **Quantum Field Theory in a Nutshell**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A - RELATIVIDADE GERAL

Neste apêndice introduziremos os conceitos necessários de Relatividade Geral que foram necessários, ao longo do trabalho, para compreender e realizar cálculos.

MÉTRICA

A métrica converte as distâncias coordenadas em distâncias físicas. Por exemplo, no espaço euclidiano tridimensional, a distância física entre dois pontos separados pelas distâncias diferenciais infinitesimais dx, dy e dz é

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

onde a notação $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ foi introduzida quando escrevemos em termos do somatório e a delta de Kronecker $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ caracteriza a métrica.

Um outro exemplo, que será amplamente utilizado no Capítulo 2, é a métrica das coordenadas polares. Neste caso, temos

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j$$

e agora $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$. A métrica em coordenadas polares é mais complexa e configurada como $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$. Ou seja, nesses dois exemplos notamos que a definição de cada métrica dependerá dos fatores multiplicativos que acompanham os infinitesimais.

Além disso, observadores que utilizam diferentes sistemas de coordenadas não necessariamente concordarão nas distâncias coordenadas entre dois pontos, mas sempre concordarão na distância física $d\ell$. Desta forma, $d\ell$ é uma grandeza invariável (Baumann, 2022). Portanto, a métrica transforma as coordenadas dependentes do observador em invariantes, o que é fundamental na Relatividade Geral.

Ainda no âmbito da Relatividade Geral, temos outro objeto essencial: métrica do espaço-tempo. Nesse caso, as coordenadas dependentes do observador $x^\mu = (t, x^i)$ se transformam no **elemento de linha**⁵³ invariável

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Assim, a métrica é $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. A maneira como a métrica varia ao longo do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria e energia no universo. Além disso, o universo obedece, em grandes escalas, ao Princípio Cosmológico e, por isso, pode ser representado por uma sequência ordenada no tempo de fatias espaciais tridimensionais, \sum_t , cada uma das quais é homogênea e isotrópica. O elemento de linha quadri-dimensional é escrito como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\ell^2,$$

sendo $d\ell^2 \equiv \gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j$ é o elemento de linha em \sum_t e $a(t)$ é o fator de escala, que descreve a expansão do universo.

INFINITESIMAIS DAS COORDENADAS ESFÉRICAS

As coordenadas esféricas são

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta, \end{cases}$$

⁵³Usamos a convenção de somatório de Einstein, onde índices repetidos são somados. A assinatura da nossa métrica será $(-, +, +, +)$, ou seja, o tempo será indicado como negativo. Comentamos que junto ao tempo a velocidade da luz está inclusa, porém ao longo deste trabalho utilizamos $c \equiv 1$ (Baumann, 2022).

e os infinitesimais associados são

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Em cada termo, obtemos

$$\begin{aligned} dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi, \\ dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi, \\ dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Sabendo que

$$d\mathbf{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

precisamos obter dx^2 , dy^2 e dz^2 . Iniciamos fazendo

$$\begin{aligned} dx^2 &= (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi) \\ &\quad \times (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi) \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} dx^2 &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d\phi^2 \\ &\quad + 2r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi d\theta dr - 2r \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi d\phi dr - 2r^2 \sin \theta \sin \phi \cos \theta \cos \phi d\theta d\phi, \end{aligned}$$

ademais

$$\begin{aligned} dy^2 &= (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \\ &\quad \times (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \end{aligned}$$

então

$$dy^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \phi dr^2 + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d\phi^2 \\ + 2r \sin \theta \sin^2 \phi \cos \theta d\theta dr + 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi dr d\phi + 2r^2 \cos \theta \sin \phi \sin \theta \cos \phi d\phi d\theta$$

e por fim

$$dz^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ = (\cos \theta dr)^2 - 2r \cos \theta \sin \theta dr d\theta + (r \sin \theta d\theta)^2.$$

portanto

$$dz^2 = \cos^2 \theta dr^2 - 2r \cos \theta \sin \theta d\theta dr + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2.$$

Agora juntamos todos esses termos em $d\mathbf{x}^2$, veja

$$d\mathbf{x}^2 = [\sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta] dr^2 + r^2 [\cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta] d\theta^2 \\ + r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi^2 + 2r \sin \theta \cos \theta [(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - 1] d\theta dr$$

concluimos

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

pois conhecemos a identidade trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. Para mais, para que possamos efetuar a transformação da Eq. (2.3) precisamos de

$$\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = xdx + ydy + zdz \\ = r \sin \theta \cos \phi (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi) \\ + r \sin \theta \sin \phi (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \\ + r \cos \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ = r \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) dr + r^2 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) d\theta \\ + r \cos^2 \theta dr - r \cos \theta r \sin \theta d\theta \\ = r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dr$$

que resulta em

$$\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = r dr.$$

Por fim, também precisamos de $\mathbf{x}^2 = x^2 + y^2 + z^2$, assim

$$\mathbf{x}^2 = (r \sin \theta \cos \phi)^2 + (r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \cos \theta)^2 = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2.$$

DERIVAÇÃO DE TENSORES

Veremos como acontece a derivação de escalares, vetores e tensores conforme uma transformação de coordenadas geral. Iniciamos considerando uma derivada parcial de um campo escalar, $\partial_\mu \phi$. Já que $\phi'(x') = \phi(x)$, temos

$$\partial'_\mu \phi'(x') = \frac{\partial \phi'(x')}{\partial x'^\mu},$$

sabendo que dx'^μ passa por uma matriz de transformação $S^\mu{}_\nu$, percebemos que há uma implícita na derivação

$$\partial'_\mu \phi'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu},$$

mas podemos definir

$$S^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}.$$

Logo,

$$\partial'_\mu \phi'(x') = (S^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} = (S^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \phi(x).$$

Notamos que $\partial_\mu \phi$ transforma-se como um vetor covariante. Fica mais interessante quando tomamos a derivação parcial de um vetor, $\partial_\lambda V^\mu$. Vemos isso quando fazemos

$$\partial'_\lambda V'^\mu(x') = \frac{\partial [S^\mu{}_\nu(x) V^\nu(x)]}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial [S^\mu{}_\nu(x) V^\nu(x)]}{\partial x^\sigma},$$

onde novamente abrimos a derivada em uma função explícita e escrevemos a inversa da matriz de transformação. Então, aplicando a regra do produto, temos

$$\partial'_\lambda V'^\mu(x') = \frac{\partial V'^\mu(x')}{\partial x'^\lambda} = (S^{-1})^\sigma{}_\lambda S^\mu{}_\nu(x) \partial_\sigma V^\nu(x) + [(S^{-1})^\sigma{}_\lambda \partial_\sigma S^\mu{}_\nu(x)] V^\nu(x).$$

O resultado anterior mostra que há um termo que corrompe a derivada. Por isto, buscamos definir uma derivada onde apesar da transformação, ainda resulta em um tensor. Seguimos a estratégia do acoplamento mínimo, onde $\partial \rightarrow \nabla = \partial + \Gamma$. Assim, invés de escrevermos $\partial_\sigma V'^\nu$, temos:

$$\nabla' V'^\nu = S^\nu{}_\rho (S^{-1})^\lambda{}_\sigma \nabla_\lambda V^\rho.$$

Até agora, foi calculado como funciona a derivação covariante de um vetor contra-variante dada pela Eq. (A.8). Para determinar como a derivada covariante atua em um quadri-vetor covariante, assumimos um escalar $f \equiv W_\nu V^\nu$ e fazemos

$$\nabla_\mu f = \nabla_\mu (W_\nu V^\nu).$$

Aplicamos a regra do produto nos dois lados da igualdade, impondo que $\partial_\mu f = \nabla_\mu f$ e operamos a derivada covariante, temos

$$(\partial_\mu W_\nu) V^\nu + W_\nu (\partial_\mu V^\nu) = (\nabla_\mu W_\nu) V^\nu + W_\nu (\nabla_\mu V^\nu)$$

podemos cancelar o termo V^ν . Portanto:

$$\boxed{\nabla_\mu W_\nu = (\partial_\mu W_\nu) - W_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}. \quad (\text{A.1})$$

Note que a diferença entre o resultado apresentado nas Eqs. (A.8) e (A.1) é o sinal de positivo e negativo e há o símbolo $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ que será trabalhado na próxima Seção A.

A derivada covariante de um tensor misto $T^\mu{}_\nu$ pode ser calculada quando consideramos um escalar $f \equiv T^\mu{}_\nu V^\nu W_\mu$ e escrevemos $\partial_\sigma f = \nabla_\sigma f$. A partir daí o raciocínio é análogo ao exposto para obter a Eq. (A.1). Dito isso, vemos

$$\partial_\sigma f = (\nabla_\sigma T^\mu{}_\nu) V^\nu W_\mu + T^\mu{}_\nu (\nabla_\sigma V^\nu) W_\mu + T^\mu{}_\nu V^\nu (\nabla_\sigma W_\mu)$$

e daí expandimos o lado esquerdo da igualdade, obtendo

$$\begin{aligned} (\partial_\sigma T^\mu{}_\nu) V^\nu W_\mu + T^\mu{}_\nu (\partial_\sigma V^\nu) W_\mu + T^\mu{}_\nu V^\nu (\partial_\sigma W_\mu) &= (\nabla_\sigma T^\mu{}_\nu) V^\nu W_\mu + T^\mu{}_\nu (\nabla_\sigma V^\nu) W_\mu \\ &+ T^\mu{}_\nu V^\nu (\nabla_\sigma W_\mu) \\ &+ T^\mu{}_\nu V^\nu (\partial_\sigma W_\mu - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} W_\alpha). \end{aligned}$$

e agora buscamos fatorar o termo $V^\nu W_\mu$ fazendo uma troca de índices mudos, veja

$$\begin{aligned} (\partial_\sigma T^\mu{}_\nu) V^\nu W_\mu &= (\nabla_\sigma T^\mu{}_\nu) V^\nu W_\mu + (T^\mu{}_\nu \Gamma^\nu_{\sigma\alpha}) V^\alpha W_\mu - (T^\mu{}_\nu \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}) V^\nu W_\alpha \\ (\partial_\sigma T^\mu{}_\nu) V^\nu W_\mu &= (\nabla_\sigma T^\mu{}_\nu) V^\nu W_\mu + (T^\mu{}_\alpha \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}) V^\nu W_\mu - (T^\alpha{}_\nu \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}) V^\nu W_\mu. \end{aligned}$$

Então, finalmente rearranjamos e obtemos

$$\boxed{\nabla_\sigma T^\mu{}_\nu = \partial_\sigma T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} T^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} T^\mu{}_\alpha}.$$

Vale comentar que as equações relativísticas devem ser construídas com derivadas covariantes e não com derivações parciais. Uma prescrição para atualizar equações que valem em um espaço plano para um espaço-tempo curvo é fazer $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$. A exemplo, vimos que a conservação do tensor energia-momento na relatividade especial implicava $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Na RG, teremos

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.2})$$

A exigência do $T_{\mu\nu}$ se conservando covariantemente está diretamente ligada à necessidade das leis de conservação⁵⁴ se preservarem mesmo na adição de um espaço-tempo curvo relacionado ao Γ quando aplicada a derivada covariante.

AÇÃO RELATIVÍSTICA

Na mecânica analítica, a ação é uma quantidade física fundamental que descreve o comportamento dinâmico de um sistema. A ação, geralmente denotada por S , é definida como a integral ao longo do tempo de uma função Lagrangiana L , que depende das coordenadas generalizadas, suas velocidades e o tempo.

⁵⁴Com mecânica clássica sabemos que a energia e momentos (linear e angular) devem se conservar.

A ação relativística deve envolver um escalar de Lorentz, de modo que todos os observadores obtenham o mesmo valor para o cálculo. Um candidato natural para isso é o tempo próprio, pois todos os observadores concordam com a quantidade de tempo decorrido em um relógio associado à partícula em movimento. Com isso, a ação de uma partícula pontual relativística é

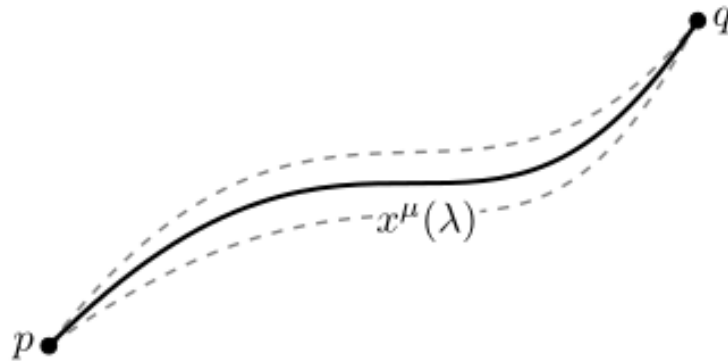
$$S = -m \int d\tau, \quad (\text{A.3})$$

onde τ é o tempo próprio ao longo da linha de mundo da partícula e m é a massa.

EQUAÇÃO GEODÉSICA

Agora, vamos usar a Eq. (A.3) para estudar o movimento das partículas em espaço-tempo curvado com métrica $g_{\mu\nu}$. Considerando uma curva arbitrária \mathcal{C} que conecta dois pontos p e q e satisfaz $ds^2 > 0$, veja Fig. 18.

Figura 18 – Ilustração de curvas que conectam dois pontos em um espaço-tempo. Para que um caminho seja geodésico, sua ação deve ser mínima, o que significa que pequenas variações no caminho não devem alterar o valor da ação (Baumann, 2022).



Fonte: Ref. (Baumann, 2022).

Na ausência de quaisquer forças não gravitacionais, as partículas seguem trajetórias especiais no espaço-tempo curvado, chamadas geodésicas, as quais possuem ação extrema. A princípio, introduzimos um parâmetro λ para etiquetar os pontos ao longo de uma curva $x^\mu(\lambda)$, com condições iniciais $\mathcal{C}(0) = p$ e $\mathcal{C}(1) = q$. Perceba que até mesmo a coordenada temporal x^0 está parametrizada. Isso é necessário para tratarmos o tempo e o espaço de forma equivalente. A ação para a curva \mathcal{C} pode ser escrita como

$$S[x^\mu(\lambda)] = -m \int_0^1 \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = -m \int_0^1 d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (\text{A.4})$$

Aqui, definimos

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

e escrevemos:

$$S = -m \int d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = -m \int d\lambda y^2,$$

onde $y^2 = -g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$. A equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\rho} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^\rho} = 0,$$

nos permitirá calcular qual a função geodésica. Assim, substituímos a função $f = y^2$, aplicamos a regra do produto no primeiro termo e definimos $\frac{\partial}{\partial x^\rho} = \partial_\rho$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ g_{\mu\nu} \left[\left(\frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\rho} \right) \dot{x}^\nu + \dot{x}^\mu \left(\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\rho} \right) \right] \right\} - \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \partial_\rho g_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Na Eq. (A.5) notamos que há uma delta de Kronecker, de maneira que

$$\delta^\mu_\rho = \frac{\partial \dot{x}^\mu}{\partial \dot{x}^\rho} \text{ e } \delta^\nu_\rho = \frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\rho}.$$

Contraímos os índices mudos através da delta e obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\rho\nu} \dot{x}^\nu + g_{\mu\rho} \dot{x}^\mu) - \partial_\rho g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,$$

manipulamos no primeiro termo o índice mudo fazendo $\nu = \mu$ e sabemos que o tensor métrico é simétrico, assim $g_{\rho\mu} = g_{\mu\rho}$. Desta forma,

$$\frac{d}{d\lambda} (2g_{\rho\mu} \dot{x}^\mu) - \partial_\rho g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Ainda no primeiro termo, aplicamos a regra do produto, fazemos $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ e reescrevemos o primeiro termo em termos de uma derivada implícita, obtendo:

$$2 \left[\left(\frac{\partial \dot{x}^\nu}{\partial \lambda} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial \dot{x}^\nu} \right) \dot{x}^\mu + g_{\rho\mu} \frac{d}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right] - \partial_\rho g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,$$

dividimos a expressão por 2 e fazemos algumas manipulações algébricas. Percebemos que, eventualmente, ocorre uma permutação cíclica dos índices. Além disso, multiplicamos

toda a expressão por $g^{\lambda\rho}$, pois assim, notamos

$$g^{\lambda\rho} g_{\rho\mu} \ddot{x}^\mu = \delta^\lambda_\mu \ddot{x}^\mu,$$

e daí:

$$\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \delta^\lambda_\mu \ddot{x}^\mu = 0.$$

Podemos contrair o índice mudo μ com auxílio de δ^λ_μ e definir o coeficiente de conexão, ou, **símbolo de Christoffel**:

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.6})$$

Assim, finalmente, calculamos a equação de movimento para uma métrica com curvatura ou **equação geodésica**:

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (\text{A.7})$$

Para mais, é também útil escrever a equação geodésica em termos da quadri-velocidade $U^\mu = dx^\mu/d\tau$. Utilizando a regra da cadeia, escrevemos:

$$\frac{d}{d\tau} U^\mu (x^\alpha(\tau)) = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\alpha} = U^\alpha \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\alpha},$$

então a equação de movimento será

$$U^\alpha \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\beta \right) = 0.$$

O termo dentro dos parênteses é conhecido como **derivada covariante** do quadri-vetor contravariante e é definido como

$$\nabla_\alpha U^\mu \equiv \frac{\partial U^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\beta. \quad (\text{A.8})$$

Consequentemente, a equação geodésica é simplificada para a forma:

$$U^\alpha \nabla_\alpha U^\mu = 0.$$

TENSOR DE EINSTEIN

Adiante, discutiremos como a curvatura do espaço-tempo é determinada pela distribuição de massa local (Baumann, 2022). Estamos na busca da seguinte relação:

$$\left(\begin{array}{c} \text{medida local da} \\ \text{curvatura do espaço-tempo} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{medida local da} \\ \text{densidade energia-estresse} \end{array} \right).$$

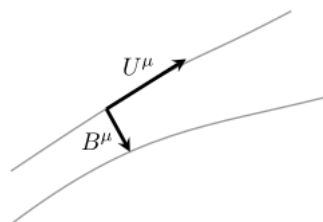
Iniciamos com o lado esquerdo da igualdade.

FORÇAS DE MARÉ E CURVATURA

Nesta seção, estudaremos as acelerações relativas de duas partículas teste, que resultam da força de maré atuando nas partículas que caem em espaço-tempo curvo. Primeiramente, analisaremos esse movimento no limite Newtoniano e, em seguida, na Relatividade Geral. Descobriremos que o movimento é determinado pelo **tensor de Riemann**, um objeto fundamental na geometria diferencial. Em um espaço-tempo curvo, as geodésicas paralelas não permanecem paralelas, o que constitui uma forma de medir a curvatura do espaço-tempo. Analogamente ao espaço Euclidiano, onde linhas paralelas nunca se encontram, no espaço-tempo de Minkowski, geodésicas paralelas permanecem paralelas eternamente. No entanto, essa característica muda no contexto de um espaço-tempo curvo.

Assuma duas geodésicas separadas por um vetor infinitesimal B^μ , ilustração visualizada na Fig. 19.

Figura 19 – Evolução de duas geodésicas com separação B_μ num espaço-tempo curvo. A aceleração relativa das geodésicas depende do tensor de Riemann e é, portanto, uma medida da curvatura do espaço-tempo (Baumann, 2022).



Fonte: Ref. (Baumann, 2022)

Definimos, a seguir, a velocidade relativa de duas geodésicas como uma derivada covariante direcional do vetor B^μ ao longo de uma das geodésicas

$$V^\mu \equiv \frac{DB^\mu}{D\tau}$$

daí fazemos

$$V^\mu = U^\nu \nabla_\nu B^\mu = \frac{dx^\nu}{d\tau} (\partial_\nu B^\mu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu B^\alpha) = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial B^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{dx^\nu}{d\tau} \Gamma_{\nu\alpha}^\mu B^\alpha = \frac{dB^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu B^\alpha.$$

Este resultado é possível pois sabemos que $U^\nu = dx^\nu/d\tau$ e também conhecemos a derivada covariante, dada pela Eq. (A.8). Similarmente, temos a aceleração relativa. Para demonstração, temos o seguinte roteiro

$$A^\mu = \frac{D^2 B^\mu}{D\tau^2} = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\nu V^\sigma = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dB^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu B^\alpha \right) + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\nu \left(\frac{dB^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma U^\gamma B^\delta \right),$$

quando aplicamos a propriedade distributiva e a regra do produto, obtemos

$$A^\mu = \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\nu\alpha}^\mu}{d\tau} U^\nu B^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dU^\nu}{d\tau} B^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\nu \frac{dB^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\nu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma U^\gamma B^\delta,$$

alterando $\sigma \rightarrow \alpha$ no quinto termo, enxergamos

$$A^\mu = \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\nu\alpha}^\mu}{d\tau} U^\nu B^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dU^\nu}{d\tau} B^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\nu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma U^\gamma B^\delta,$$

já que temos simetria na conexão afim $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \Gamma_{\alpha\nu}^\mu$. Por isto,

$$A^\mu = \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma_{\nu\alpha}^\mu}{d\tau} U^\nu B^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dU^\nu}{d\tau} B^\alpha + 2\Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\nu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma U^\gamma B^\delta.$$

Seja

$$\frac{d\Gamma_{\nu\alpha}^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{\partial \Gamma_{\nu\alpha}^\mu}{\partial x^\rho}$$

e

$$\frac{dU^\nu}{d\tau} = -\Gamma_{\gamma\delta}^\nu U^\gamma U^\delta$$

então A^μ será:

$$A^\mu = \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{\partial \Gamma_{\nu\alpha}^\mu}{\partial x^\rho} \right) U^\nu B^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu (-\Gamma_{\gamma\delta}^\nu U^\gamma U^\delta) B^\alpha + 2\Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\nu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma U^\gamma B^\delta.$$

Podemos alterar alguns índices mudos para conseguir colocar $U^\nu U^\gamma B^\delta$ em evidência. Portanto, a expressão a seguir

$$A^\mu = \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + \partial_\rho \Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\rho U^\nu B^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\nu U^\gamma U^\delta B^\alpha + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma U^\nu U^\gamma B^\delta,$$

será transformada em

$$\begin{aligned} A^\mu &= \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + \partial_\gamma \Gamma_{\nu\delta}^\mu U^\gamma U^\nu B^\delta - \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\gamma\nu}^\beta U^\gamma U^\nu B^\delta + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma U^\nu U^\gamma B^\delta \\ &= \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\alpha}^\mu U^\nu \frac{dB^\alpha}{d\tau} + (\partial_\gamma \Gamma_{\nu\delta}^\mu - \Gamma_{\gamma\nu}^\beta \Gamma_{\beta\delta}^\mu + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) U^\nu U^\gamma B^\delta. \end{aligned}$$

Buscamos identificar quais são os dois primeiros termos. Para isso, iniciamos definindo duas geodésicas que estão paralelas momentaneamente e separadas por B^μ . Por conseguinte,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

e

$$\frac{d^2 \bar{x}^\mu}{d\tau^2} + \bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\mu \frac{d\bar{x}^\nu}{d\tau} \frac{d\bar{x}^\alpha}{d\tau} = 0.$$

Sabendo que $\bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\mu = \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(\bar{x}^\mu)$, onde $\bar{x}^\mu = x^\mu + B^\mu$, então a expansão em Taylor para B^μ resultará em

$$\bar{\Gamma}_{\nu\alpha}^\mu = \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \partial_\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu B^\delta.$$

Logo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + [\Gamma_{\nu\alpha}^\mu + (\partial_\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu) B^\delta] (\dot{x}^\nu + \dot{B}^\nu) (\dot{x}^\alpha + \dot{B}^\alpha) = 0.$$

Em seguida, vamos efetuar a propriedade distributiva. Ressaltamos que $B^\mu \ll 1$, por isto $\dot{B}^\mu \lll 1$, ou seja

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu (\dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha + \dot{x}^\nu \dot{B}^\alpha + \dot{B}^\nu \dot{x}^\alpha) + (\partial_\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu) B^\delta \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha = 0,$$

pois no termo derivado da expansão em Taylor os únicos termos que sobressaem são os

que não possuem vínculo com a velocidade da separação B^μ . Portanto, organizamos como

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha + \frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \left(\dot{x}^\nu \dot{B}^\alpha + \dot{B}^\nu \dot{x}^\alpha \right) + (\partial_\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu) B^\delta \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha = 0,$$

mas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha = 0.$$

Por isto,

$$\frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \dot{x}^\nu \dot{B}^\alpha + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \dot{B}^\nu \dot{x}^\alpha = -(\partial_\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu) B^\delta \dot{x}^\nu \dot{x}^\alpha.$$

Fazemos alguns ajustes nos índices mudos e reescrevemos $\dot{x}^\omega = U^\omega$. Então,

$$\frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu \dot{x}^\nu \dot{B}^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \dot{B}^\alpha \dot{x}^\nu = -(\partial_\delta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu) B^\delta U^\nu U^\alpha,$$

porém recordamos da simetria para concluir $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \Gamma_{\alpha\nu}^\mu$. Além disto, no lado direito da igualdade escrevemos $\alpha \rightarrow \gamma$, daí

$$\frac{d^2 B^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \dot{x}^\nu \dot{B}^\alpha = -(\partial_\delta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu) B^\delta U^\nu U^\gamma.$$

Finalmente, substituímos:

$$\begin{aligned} A^\mu &= -(\partial_\delta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu) B^\delta U^\nu U^\gamma + (\partial_\gamma \Gamma_{\nu\delta}^\mu - \Gamma_{\gamma\nu}^\beta \Gamma_{\beta\delta}^\mu + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) U^\nu U^\gamma B^\delta \\ &= -(\partial_\delta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\nu\delta}^\mu + \Gamma_{\gamma\nu}^\beta \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) U^\nu U^\gamma B^\delta \end{aligned}$$

e notamos que na última linha é necessário fazer um ajuste de índice mudo alterando $\sigma \rightarrow \beta$. Consequentemente

$$A^\mu = -\left(\partial_\delta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\nu\delta}^\mu + \Gamma_{\gamma\nu}^\beta \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\beta \right) U^\nu U^\gamma B^\delta.$$

Aqui, definimos finalmente o **tensor de Riemann**:

$$\boxed{R_{\nu\gamma\delta}^\mu \equiv \partial_\delta \Gamma_{\nu\gamma}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\nu\delta}^\mu + \Gamma_{\gamma\nu}^\beta \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\beta\nu}^\mu \Gamma_{\gamma\delta}^\beta}. \quad (\text{A.9})$$

Concluimos que a aceleração relativa será

$$\frac{D^2 B^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\nu\gamma\delta} U^\nu U^\gamma B^\delta.$$

ADIVINHANDO A EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Nesta seção, inicialmente, iremos estimar a equação de Einstein por meio de um chute. A partir disso, construiremos uma ação para a métrica e derivaremos a equação correspondente para o movimento. Estamos, *a priori*, em busca da generalização relativística da equação de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. Sabemos que a densidade de energia corresponde à componente temporal do tensor energia-momento, ou seja, $\rho = T_{00}$, o que sugere que o tensor $T^{\mu\nu}$ deve aparecer no lado direito da igualdade que estamos buscando. Além disso, sabemos que a generalização relativística do potencial gravitacional Φ é a métrica $g_{\mu\nu}$. Ao analisar o lado esquerdo da equação de Poisson, notamos que há duas derivações atuando no potencial. Isso nos leva a cogitar que o operador d'Alembertiano $\square = \nabla^\sigma \nabla_\sigma$ deva atuar sobre $g_{\mu\nu}$. No entanto, essa suposição não condiz com a realidade, pois devemos considerar a **condição de metricidade**

$$\boxed{\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0}. \quad (\text{A.10})$$

Essa condição é fundamental em várias teorias, especialmente na Relatividade Geral, pois impõe uma relação entre a métrica $g_{\mu\nu}$ e a conexão $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Ela garante que o transporte paralelo⁵⁵ preserve os produtos escalares e a estrutura geométrica do espaço (Wald, 1984).

Para inferir corretamente a equação de movimento, precisamos do traço do tensor de maré. Como o tensor de Riemann, dado na Eq. (A.9), é o equivalente do tensor de maré na RG, tomamos seu traço para estabelecer uma conexão com $\nabla^2\Phi$. Por isso, definimos o **tensor Ricci**:

$$\boxed{R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho}}. \quad (\text{A.11})$$

⁵⁵O transporte paralelo descreve como vetores são "transportados" ao longo de uma curva em um espaço-tempo curvado, de maneira que o vetor não sofra rotação ou mudança em sua direção quando movido ao longo da curva. Em outras palavras, o transporte paralelo de um vetor significa que ele mantém suas propriedades geométricas enquanto é deslocado ao longo de uma trajetória, levando em consideração a curvatura do espaço-tempo (Baumann, 2022).

UM PRIMEIRO E UM SEGUNDO CHUTE

A primeira suposição do Einstein para a equação de campo da RG foi

$$R_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} \kappa T_{\mu\nu},$$

onde κ é uma constante. No entanto, essa suposição não é válida, pois, em geral, temos $\nabla^\mu R_{\mu\nu} \neq 0$, o que é inconsistente com a conservação de energia, que na RG é descrita por $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Para provar este argumento, utilizamos a identidade Bianchi (Baumann, 2022; Bianchi, 1902).⁵⁶ Veja:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\lambda\sigma} g^{\mu\rho} (\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma}) \\ &= \nabla^\sigma R_{\nu\rho\sigma} + \nabla_\nu (g^{\mu\rho} R_{\mu\rho\sigma}^\sigma) + \nabla^\rho [g^{\lambda\sigma} (-R_{\lambda\nu\rho\sigma})] \\ &= \nabla^\sigma R_{\nu\sigma} - \nabla_\nu R + \nabla^\rho R_{\nu\rho}. \end{aligned}$$

Nas contas acima foram utilizados propriedades do tensor de Riemann e também a noção do tensor de Ricci. Na última linha deste resultado, foi obtido um termo conhecido como o **escalar de Ricci**, definido matematicamente como

$$\boxed{R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}}, \quad (\text{A.12})$$

assim, temos

$$\nabla^\sigma R_{\nu\sigma} = \nabla_\nu R - \nabla^\rho R_{\nu\rho} \neq 0.$$

Considerando a expressão $\nabla^\sigma R_{\nu\sigma} - \nabla_\nu R + \nabla^\rho R_{\nu\rho}$, fazemos uma alteração nos índices mudos, com o objetivo de obter, posteriormente, um resultado que obedeça à conservação:

$$\nabla^\mu R_{\nu\mu} - \nabla_\nu R + \nabla^\mu R_{\nu\mu} = 0.$$

Sabendo que $R_{\nu\mu} = R_{\mu\nu}$, temos

$$2\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \nabla_\nu R \Rightarrow \nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R. \quad (\text{A.13})$$

⁵⁶Esta identidade afirma que a soma das permutações cíclicas dos três primeiros índices de $\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma}$ se cancelam (Baumann, 2022).

Mostramos, finalmente, que o argumento introduz uma problemática contrariando a conservação. Para que isso seja resolvido, notamos que a Eq. (A.13) pode ser escrita como

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla_\nu R = 0 \Rightarrow \nabla^\mu R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\nabla^\mu \frac{R}{2} = 0,$$

logo concluímos:

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) = 0. \quad (\text{A.14})$$

A conclusão da Eq. (A.14) sugere uma medida alternativa de curvatura, chamada de **tensor de Einstein**, definido adiante

$$\boxed{G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}, \quad (\text{A.15})$$

que é consistente com a conservação de energia do tensor energia-momento. Até agora, nosso chute resultou em

$$G_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.16})$$

Para mostrar que esta equação está correta, vamos reduzi-la à equação de Poisson no limite newtoniano na próxima seção.

EQUAÇÃO DE EINSTEIN

É conveniente escrever a equação de Einstein de uma maneira ligeiramente diferente, quando contraímos os dois lados da Eq. (A.16). Então

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = \kappa T \Rightarrow R - 2R = \kappa T,$$

pois sabemos que $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, daí concluímos

$$R = -\kappa T. \quad (\text{A.17})$$

Substituindo a Eq. (A.17) na Eq. (A.16), temos a equação de Einstein com *traço-reverso*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(-\kappa T) = \kappa T_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (\text{A.18})$$

Neste regime newtoniano, o tensor energia-momento assume a forma de um fluido sem pressão (Baumann, 2022). Sabemos que o tensor tenha a forma

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Especificamos $T^{00} = -\rho$ e calculamos seu escalar $T = g^{00}T_{00} = (-1)\rho$. O componente temporal da Eq. (A.18) será

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) = \kappa \left[\rho - \frac{1}{2}(-1)(-\rho) \right] = \frac{1}{2}\kappa\rho. \quad (\text{A.19})$$

É de nosso interesse entender R_{00} no limite estático de campo fraco, onde a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser escrita em termos da métrica de Minkowski e uma perturbação, isto é, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ (Baumann, 2022). O componente temporal do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ será

$$R_{00} = R^i_{0i0} = \partial_i \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{i0} + \Gamma^i_{j\lambda} \Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^i_{0\lambda} \Gamma^\lambda_{j0}.$$

Ignoraremos os termos da forma Γ^2 , pois são de segunda ordem na perturbação da métrica, que *a priori* é $|h| \ll 1$. Sabemos também que a perturbação é independente do tempo, o que implica que a derivada $\partial_0 \Gamma^i_{i0} = 0$. Além disso, é importante notar que a conexão Γ contém $g_{\mu\nu}$, o que resulta em uma redução de termos. Veja:

$$R_{00} = \partial_i \Gamma^i_{00}.$$

Agora, é necessário descobrir quem é Γ^i_{00} . Por isto, iniciamos escrevendo o símbolo de Christoffel

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}g^{i\lambda} (\partial_0 g_{0\lambda} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = \frac{1}{2}g^{i\lambda} (2\partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}),$$

e substituimos a métrica $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} (\eta^{i\lambda} - h^{i\lambda}) [2\partial_0 (\eta_{0\lambda} + h_{0\lambda}) - \partial_\lambda (\eta_{00} + h_{00})] = \frac{1}{2} (\eta^{i\lambda} - h^{i\lambda}) [2\partial_0 (\eta_{00} + \eta_{0j}) - \partial_\lambda h_{00}],$$

mas os termos que envolvem a métrica de Minkowski são reduzidos a zero quando efetuadas suas derivações. Por fim,

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{i\lambda} \partial_\lambda h_{00} = -\frac{1}{2} \partial^i h_{00}.$$

Se $R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i$, concluímos $R_{00} = \partial_i (-\frac{1}{2} \partial^i h_{00})$, daí

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \partial_i \partial^i h_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}. \quad (\text{A.20})$$

Podemos igualar o resultado da Eq. (A.19) com a Eq. (A.20). Desta forma,

$$\frac{1}{2} \kappa \rho = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \Rightarrow \nabla^2 h_{00} = -\kappa \rho.$$

Sabendo que $m\mathbf{a} = -\nabla U$, escrevemos esta expressão de forma indicial

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \Phi,$$

e buscamos identificar $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$ para calcular h_{00} e finalmente obter κ . Com equação geodésica para $v \ll c$, escrevemos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0,$$

por conseguinte

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \left(\frac{1}{2} \eta^{i\lambda} \partial_\lambda h_{00} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} \partial^i h_{00}.$$

Por isto, concluímos $h_{00} = -2\Phi$. Dito isso:

$$\nabla^2 (-2\Phi) = -\kappa \rho \Rightarrow \nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} \kappa \rho,$$

e com Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$, podemos concluir que

$$\kappa = 8\pi G.$$

Logo, a equação de Einstein é

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.21})$$

Ela descreve desde maçãs caindo até órbitas planetárias, buracos negros - mas não sua singularidade - e a expansão do Universo (Baumann, 2022).

CÁLCULO DO SÍMBOLO DE CHRISTOFFEL COM ÍNDICES IGUAIS

Conhecendo a definição:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} (\partial_{\nu}g_{\nu\gamma} + \partial_{\nu}g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma}g_{\mu\nu}),$$

escreveremos uma conexão que será relevante para futuros cálculos, sendo ela:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\gamma} (\partial_{\mu}g_{\lambda\gamma} + \partial_{\lambda}g_{\gamma\mu} - \partial_{\gamma}g_{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (g^{\gamma\mu}\partial_{\gamma}g_{\lambda\mu} + g^{\mu\gamma}\partial_{\lambda}g_{\gamma\mu} - g^{\mu\gamma}\partial_{\gamma}g_{\mu\lambda}) \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\gamma}\partial_{\gamma}g_{\mu\lambda} + g^{\mu\gamma}\partial_{\lambda}g_{\gamma\mu} - g^{\mu\gamma}\partial_{\gamma}g_{\mu\lambda}), \end{aligned}$$

na terceira linha foi trocado os índices mudos $\mu \rightarrow \gamma$ e na quarta linha utilizamos a propriedade da simetria da métrica, assim temos

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\partial_{\lambda}g_{\gamma\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\partial_{\lambda}g_{\mu\gamma}.$$

Assim, relacionamos finalmente a conexão afim com a derivada do determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ quando fazemos

$$\partial_{\rho}\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\gamma\mu}\partial_{\rho}g_{\mu\gamma} \implies \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\rho}g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\rho}\sqrt{-g},$$

então

$$\boxed{\Gamma_{\mu\rho}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\rho}\sqrt{-g} = \frac{\partial(\ln\sqrt{-g})}{\partial x^{\rho}} = \partial_{\rho}\ln\sqrt{-g}}. \quad (\text{A.22})$$

DERIVAÇÃO PARCIAL DO DETERMINANTE DA MÉTRICA

Buscamos efetuar o determinante da matriz A seguindo a Ref. (Cuzinato, 2014). Sabemos que é possível escrever a matriz em termos de componentes, por isto:

$$a = \det A = \sum_{j=1}^3 a_{ij} c_{ij},$$

onde c_{ij} são os componentes cofatores e não contém os elementos da matriz a_{ij} associado, ou seja, são constantes. A derivada parcial do determinante a em relação a um elemento genérico a_{mn} será

$$\frac{\partial a}{\partial a_{mn}} = \frac{\partial}{\partial a_{mn}} \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} c_{ij} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{mn}} c_{ij} = \sum_{j=1}^3 \delta_i^m \delta_j^n c_{ij}.$$

As derivadas resultam em uma delta de Kronecker, pois só serão diferentes de zero quando estiverem em relação ao mesmo fator. Assim, contraímos os índices

$$\frac{\partial a}{\partial a_{mn}} = \sum_{j=1}^3 \delta_j^n c_{mj} = c_{mn}.$$

Notando que a derivada do determinante em relação à um componente genérico depende implicitamente de a_{ij} , escrevemos

$$\frac{\partial a}{\partial a_{mn}} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial a_{mn}}.$$

Estendemos este raciocínio para uma derivação em relação à uma coordenada, visando aplicar esta analogia ao determinante da métrica $g_{\mu\nu}$ em relação à x^k . Portanto,

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = c_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}.$$

Nós sabemos que a noção da matriz de cofator transposta c_{ji} está relacionada com o determinante da matriz geratriz e da sua inversa, isto é

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T,$$

então podemos reescrever como

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{a} c_{ji},$$

portanto

$$c_{ji} = a_{ij}^{-1} a.$$

Assim, finalmente, temos para $c_{ij} = a_{ji}^{-1} a$.

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = a_{ji}^{-1} a \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}.$$

Podemos utilizar a definição $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$, para notarmos

$$\partial_k a = a_{ji}^{-1} a \partial_k a_{ij}.$$

Daí, para estender esse resultado à $g = \det g_{\mu\nu}$ podemos escrever

$$\frac{\partial g}{\partial x^\rho} = g g_{\nu\mu}^{-1} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}.$$

Vale comentar que para o tensor métrico, a matriz inversa é o conjunto das componentes contravariantes, ou seja

$$g^{-1} = (g_{\mu\nu}^{-1}) = g^{\mu\nu}.$$

Conhecendo a simetria da métrica utilizada, temos

$$g_{\nu\mu}^{-1} = g^{\nu\mu} = g^{\mu\nu}.$$

Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial x^\rho} = g g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \implies \partial_\rho g = g g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu}.$$

A relação entre a métrica contravariante e a métrica covariante é dada por uma delta de Kronecker e com ela traçamos um caminho para escrever o resultado anterior com termos trocados, veja

$$g^{\mu\rho} g_{\mu\nu} = \delta^\rho_\nu, \tag{A.23}$$

se fazemos $\rho = \nu$, temos

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\nu_\nu = \delta^0_0 + \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Daí,

$$\partial_\rho (g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = \partial_\rho (4) = 0$$

e também

$$\partial_\rho (g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = (\partial_\rho g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\mu\nu}),$$

então teremos

$$(\partial_\rho g^{\mu\nu}) g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) = 0 \implies g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu}.$$

Logo

$$\boxed{\partial_\rho g = g g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.24})$$

Aqui, fazemos um adendo que eventualmente será necessário conhecer quem é $\delta_g g$. Sabemos que há um paralelo entre ∂ e δ , por isso concluímos

$$\delta_g g = g g^{\mu\nu} \delta_g g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.25})$$

Com a Eq. (A.24) estudaremos $\partial_\rho \sqrt{-g}$. Iniciamos fazendo

$$\partial_\rho \sqrt{-g} = \partial_\rho (-g)^{1/2} = \frac{1}{2} (-g)^{-1/2} \partial_\rho (-g) = -\frac{1}{2} (-g)^{-1/2} \partial_\rho g$$

no último termo podemos substituir a derivada do determinante que calculamos *a priori*.

Então,

$$\partial_\rho \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} (-g)^{-1/2} g g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu}.$$

Agora racionalizamos:

$$\partial_\rho \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(-g)} g \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu},$$

portanto, o resultado desta seção é

$$\boxed{\partial_\rho \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.26})$$

Para contas com \tilde{g} , o raciocínio é análogo. Por isto, aproveitamos o resultado e obtemos:

$$\boxed{\partial_\rho \sqrt{-\tilde{g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.27})$$

AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT

Através do PMA, é possível demonstrar a equação de Einstein de maneira alternativa. Para isso, a ação deve ter um integrando escalar, que seja uma medida local da curvatura espaço-temporal e, no máximo, de segunda ordem em derivadas da métrica (Baumann, 2022). O único objeto que satisfaz essas condições é o escalar de Ricci, o que nos leva à conhecida **ação de Einstein-Hilbert** Carroll, 2019; Ryder, 2009; Wald, 1984)

$$S_{\text{E-H}} = \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (\text{A.28})$$

onde $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ é o determinante da métrica. O fator $\sqrt{-g}$ foi adicionado para garantir que o elemento de volume $d^4x \sqrt{-g}$ seja invariante sob transformações de coordenadas (Baumann, 2022). Sabemos que o PMA é escrito como $\delta_g S_{\text{E-H}} = 0$, quando variamos a ação com respeito à métrica. Então, conhecendo a definição do escalar de Ricci, fazemos

$$\delta_g S_{\text{E-H}} = \int d^4x \delta_g (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = 0,$$

e a partir da equação acima realizaremos uma sequência de operações. Iniciamos aplicando a variação em cada um dos termos dentro do parênteses. Veja

$$\delta_g S_{\text{E-H}} = \int d^4x [(\delta_g \sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} (\delta_g g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta_g R_{\mu\nu})] = 0, \quad (\text{A.29})$$

daí resolvemos $\delta_g \sqrt{-g}$, pois conhecemos quem é g . Então, seguindo a Ref. (Ryder, 2009), percorremos os seguintes os passos

$$\delta_g (-\det g_{\mu\nu})^{1/2} = \frac{1}{2} (-\det g_{\mu\nu})^{-1/2} \delta (-\det g_{\mu\nu})$$

notamos que é necessário também entender quem é $\delta_g g = \delta (\det g_{\mu\nu})$. Assim, na Seção A deste mesmo Apêndice, mostramos que

$$\delta_g g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu}.$$

Assim, é válido fazer a substituição, quando multiplicamos e dividimos por $\sqrt{-g}$ o lado direito da igualdade:

$$\delta_g \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Munidos deste resultado, substituímos na Eq. (A.29) e a separamos em três integrais. Vale comentar que haverá uma troca de índices mudos já que não é possível escrever termos iguais na mesma sentença

$$\begin{aligned} \delta_g S_{\text{E-H}} &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} + \int d^4x \sqrt{-g} (\delta_g g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\delta_g R_{\mu\nu}) = 0. \end{aligned}$$

Precisamos estudar quem é o último termo deste resultado. Sabendo que a identidade de Palatini⁵⁷ seja

$$\delta R_{\mu\kappa} = \nabla_\lambda \delta_g \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda - \nabla_\kappa \delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda,$$

escrevemos, já que $g^{\mu\nu} \nabla_\lambda = \nabla_\lambda g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda \delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \nabla_\nu \delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) \\ &= \sqrt{-g} [(\nabla_\lambda g^{\mu\nu}) \delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda + \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - (\nabla_\nu g^{\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)]. \end{aligned}$$

⁵⁷Demonstração feita na Seção A deste Apêndice.

Conhecendo a Eq. (A.10), temos

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} [\nabla_\lambda (g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)].$$

Novamente aplicamos a regra do produto e utilizaremos o fato de que $\nabla_\lambda \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \nabla_\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu} &= [(\sqrt{-g}\nabla_\lambda) (g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) + \nabla_\lambda (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) \\ &\quad - (\sqrt{-g}\nabla_\nu) (g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)] \\ &= [\nabla_\lambda (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \nabla_\nu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)]. \end{aligned}$$

Já mostramos que

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu),$$

no resultado vinculado a Seção A deste Apêndice, por isso podemos escrever

$$\sqrt{-g}\nabla_\mu V^\mu = \nabla_\mu (\sqrt{-g} V^\mu) = \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu).$$

Logo, fazemos uma extensão ao nosso problema

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu} = [\partial_\lambda (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \partial_\nu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda)],$$

no último termo trocamos o índice mudo $\nu \rightarrow \lambda$, daí obtemos

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu} = [\partial_\lambda (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) - \partial_\lambda (\sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\nu)].$$

Dito isto, agora a derivada parcial de ambos os termos é a mesma e assim colocamos a em evidência, veja:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu} = \partial_\lambda (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\nu).$$

Neste resultado, definimos um vetor contravariante escrito na forma

$$W^\lambda \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \sqrt{-g}g^{\mu\lambda}\delta_g \Gamma_{\nu\mu}^\nu.$$

Portanto,

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu} = \partial_\lambda W^\lambda.$$

Em notação indicial, sabemos que ∂_λ é o análogo ao operador gradiente e este operador atuando em um vetor retorna um divergente. Este raciocínio é estendido neste resultado. Sabendo que o Teorema de Gauss seja

$$\int_\Omega d^4x \partial_\lambda W^\lambda = \int_{\partial\Omega} d^3x n_\lambda W^\lambda,$$

onde Ω é o termo de volume, $\partial\Omega$ o termo de superfície e n^ν o vetor normal, temos para o nosso caso

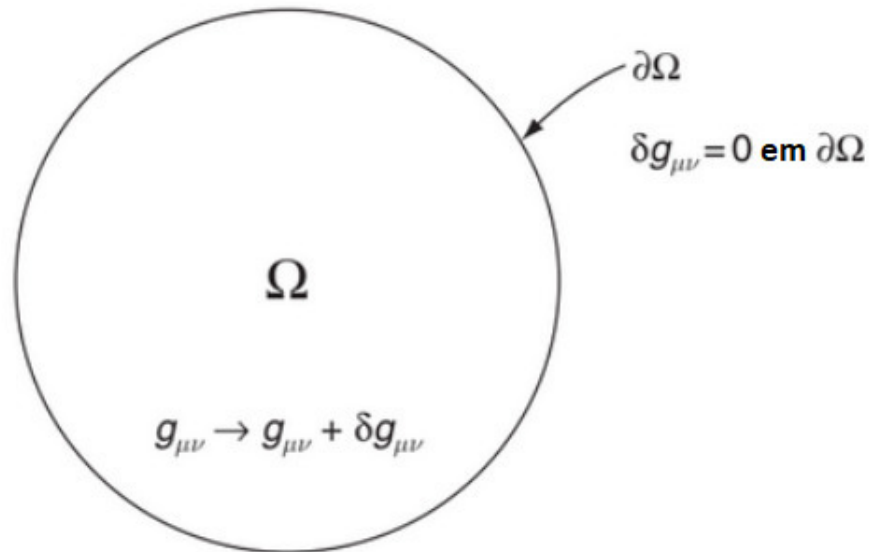
$$\int_\Omega d^4x \partial_\lambda W^\lambda = \int_{\partial\Omega} d^3x n_\lambda \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu}.$$

Para entendermos como a variação do tensor de Ricci funciona, expandimos o para visualizar seus componentes

$$\delta_g R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} [\nabla_\lambda \nabla_\nu (\delta_g g_{\sigma\mu}) + \nabla_\lambda \nabla_\mu (\delta_g g_{\sigma\nu}) - \nabla_\lambda \nabla_\sigma (\delta_g g_{\mu\nu}) - \nabla_\nu \nabla_\mu (\delta_g g_{\lambda\sigma})].$$

Na integral de superfície, isto é $\int_{\partial\Omega} d^3x$, sabemos que $\delta_g g_{\mu\nu} = 0$ pois a variação ocorre somente dentro dela e não em seu contorno, vide Fig. (20).

Figura 20 – Um espaço-tempo Ω com limite $\partial\Omega$; a variação do tensor métrico desaparece na fronteira (Ryder, 2009).



Fonte: Adaptado de Ryder (2009).

Logo, concluímos que

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta_g R_{\mu\nu} = 0.$$

Assim,

$$\delta_g S_{\text{E-H}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta_g g^{\mu\nu} \right) g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} + \int d^4x \sqrt{-g} (\delta_g g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu}.$$

Agora, iremos manipular algébricamente os índices apresentados no resultado acima. Iniciamos colocando alguns termos em evidência:

$$\delta_g S_{\text{E-H}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} \right] \delta_g g^{\mu\nu} = 0,$$

e contraímos os índices ρ, σ , daí obtemos o escalar de Ricci R

$$\delta_g S_{\text{E-H}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta_g g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.30})$$

Conhecemos a forma do tensor de Einstein, dada a Eq. (A.15), sendo a mesma que encontra-se dentro dos parênteses acima. Já que na integral do hipervolume $\delta_g g^{\mu\nu} \neq 0$ e $\sqrt{-g}$ faz parte do invariante de escala, então, para que a ação seja extrema, a variação deve desaparecer para qualquer valor de $\delta_g g^{\mu\nu}$. A condição citada somente acontece quando

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.31})$$

que representa a equação de Einstein no vácuo. Quantitativamente,

$$\boxed{\delta_g S_{\text{E-H}} = \int d^4x \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta_g g^{\mu\nu} = 0.}$$

INCLUINDO MATÉRIA NA AÇÃO EH

Ademais, incluiremos a matéria no Universo. Assim, para alcançar a equação de Einstein em circunstâncias fora do vácuo, a ação será

$$S_{\text{EH-M}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_M, \quad (\text{A.32})$$

onde a constante κ permite uma diferença na normalização relativa da ação gravitacional e ação da matéria é definida como (Baumann, 2022)

$$S_M \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}}. \quad (\text{A.33})$$

Variando esta ação com respeito à métrica, temos

$$\delta_g S_{\text{EH-M}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} (\sqrt{-g} R) + \delta_g S_M.$$

A primeira variação já sabemos que resulta na Eq. (A.30). A outra variação impomos uma definição vinculada ao tensor energia-momento:

$$\boxed{\delta_g S_M \equiv -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.34})$$

Por outro lado, temos

$$\delta_g S_M = \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.35})$$

Comparando a Eq. (A.34) e a Eq. (A.35), vemos:

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = \int d^4x \left[\frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}.$$

Identificamos a igualdade

$$-\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}},$$

e assim definimos o **tensor de energia-momento**

$$\boxed{T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}}}. \quad (\text{A.36})$$

Daí fazemos:

$$\delta_g S_{\text{EH-M}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta_g (\sqrt{-g}R) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta_g g^{\mu\nu}$$

e colocamos alguns termos em evidência:

$$\delta_g S_{\text{EH-M}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa} G_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \right) \delta_g g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.37})$$

A Eq. (A.37) tem, portanto, um máximo quando o termo dentro dos parênteses igualam-se à zero, resultando em $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$, uma vez que a variação deve valer para qualquer $\delta g^{\mu\nu}$. Impondo que κ valha $8\pi G$, temos

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.38})$$

A CONSTANTE COSMOLÓGICA

Existe outro termo que pode ser adicionado ao lado esquerdo da equação de Einstein, que preserva a conservação de energia local, a conhecida **constante cosmológica** $\Lambda g_{\mu\nu}$ (Baumann, 2022). Fazer esta adição não causa alteração, pois conhecemos a condição de metricidade, dada na Eq. (A.10). Então, vemos

$$\boxed{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}. \quad (\text{A.39})$$

Com cálculos posteriores, perceberam que a ação a seguir era o resultado da equação de movimento mencionada acima, equação essa que foi determinada primeiro para, em seguida, conhecerem a ação que a fundamentava. Assim, dada a ação

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\mathcal{M}} - \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} 2\Lambda, \end{aligned}$$

aplicamos a variação em relação à g . Imediatamente notamos que os dois primeiros termos

que aparecem na última linha acima são os mesmo que em (A.32). Por isto

$$\begin{aligned}\delta_g S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} - T_{\mu\nu} \right) \delta_g g_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta_g (\sqrt{-g} 2\Lambda) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} - T_{\mu\nu} \right) \delta_g g_{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [(\delta_g \sqrt{-g}) 2\Lambda + \sqrt{-g} (\delta_g 2\Lambda)],\end{aligned}\tag{A.40}$$

e já foi mostrado que

$$\delta_g \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta_g g^{\mu\nu}.$$

Ademais, sabemos que $\delta_g 2\Lambda = 0$, pois δ_g atua como uma derivada e pelo cálculo, sabemos, intrinsecamente, que derivada de constante é zero. Assim, quando substituimos (A.40) temos

$$\begin{aligned}\delta_g S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} - T_{\mu\nu} \right) \delta_g g_{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta_g g^{\mu\nu} \Lambda \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} - T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{\kappa} \right) \delta_g g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

Análogo as duas seções anteriores, temos que $\delta_g g_{\mu\nu} \neq 0$ e $d^4x \sqrt{-g}$ invariante sob transformação. Para satisfazer $\delta_g S = 0$, faz-se necessário

$$\frac{G_{\mu\nu}}{\kappa} - T_{\mu\nu} + \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{\kappa} = 0 \implies G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

como esperado, dada a Eq. (A.39).

IDENTIDADE DE PALATINI

O tensor Riemann para curvatura é definida em termos da conexão de Levi-Civita, ou símbolo de Christoffel, expressado na Eq. (A.6), como

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}.$$

Para demonstração da identidade de Palatini variamos o tensor de Riemann, e obtemos

$$\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}. \quad (\text{A.41})$$

Sabemos que a conexão afim $\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}$ não é um tensor, porém a variação $\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho}$ entre duas conexões é. Por isso, analisamos como a derivada covariante atua. Pela definição deste operador, dado na Eq.(A.8), escrevemos

$$\nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}. \quad (\text{A.42})$$

Notamos que aparecem três gamas vinculados à variação, pois existem três índices para serem contraídos e seus respectivos sinais acompanham se o índice é contravariante ou covariante. Agora, fazemos um paralelo com $\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$. Para isto, calculamos quem é $\nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$. Então,

$$\nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}. \quad (\text{A.43})$$

Daí, escrevemos a subtração da Eq. (A.42) com a Eq. (A.43)

$$\nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}.$$

Conhecendo a simetria dos índices covariantes no símbolo de Christoffel, temos

$$\nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}.$$

Assim, reorganizamos os termos para mostrarmos que $\delta R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho}$, veja

$$\nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} = \partial_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}.$$

O resultado apresentado acima é a mesma expressão da Eq. (A.41). A variação do tensor de Ricci é escrito como

$$\boxed{\delta R_{\sigma\nu} = \delta R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho}}. \quad (\text{A.44})$$

Esta expressão é a conhecida **Identidade de Palatini**.

DERIVADA COVARIANTE DE UM QUADRI-VETOR

Apresentamos outro cálculo utilizado recorrentemente durante as manipulações de equações de movimento. Efetuamos a seguir a derivação covariante de um quadri-vetor V^μ , veja:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu V^\mu &= \partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu V^\lambda \\
 &= \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\lambda \sqrt{-g}) V^\lambda \\
 &= \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu \sqrt{-g}) V^\mu \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g} \partial_\mu V^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu \sqrt{-g}) V^\mu
 \end{aligned}$$

agora colocamos $\sqrt{-g}$ em evidência e fazemos:

$$\sqrt{-g} \nabla_\mu V^\mu = \sqrt{-g} (\partial_\mu V^\mu) + (\partial_\mu \sqrt{-g}) V^\mu.$$

Pela regra do produto temos $\partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu) = (\partial_\mu \sqrt{-g}) V^\mu + \sqrt{-g} (\partial_\mu V^\mu)$, então isolamos o termo $(\partial_\mu \sqrt{-g}) V^\mu$:

$$(\partial_\mu \sqrt{-g}) V^\mu = (\partial_\mu \sqrt{-g} V^\mu) - \sqrt{-g} (\partial_\mu V^\mu) \quad (\text{A.45})$$

daí

$$\sqrt{-g} \nabla_\mu V^\mu = \sqrt{-g} (\partial_\mu V^\mu) + (\partial_\mu \sqrt{-g} V^\mu) - \sqrt{-g} (\partial_\mu V^\mu) = (\partial_\mu \sqrt{-g} V^\mu).$$

Portanto, concluímos

$$\boxed{\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu \sqrt{-g} V^\mu)}. \quad (\text{A.46})$$

APÊNDICE B – COSMOLOGIA PADRÃO

TENSORES DE RICCI E SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL FLRW

Neste apêndice, buscamos calcular os tensores de Ricci e os símbolos de Christoffel necessários, escritos com a métrica FLRW, para descobrir quem é $G_{\mu\nu}$. Iniciamos comentando que em todo esse trabalho estamos considerando a velocidade da luz sendo $c \equiv 1$. Então, fazemos

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda - \partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0\lambda}^\rho \Gamma_{0\rho}^\lambda \\
 &= \partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{00}^\rho + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{00}^\rho \Gamma_{0\rho}^0 - \Gamma_{0i}^\rho \Gamma_{0\rho}^i \\
 &= \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{00}^\rho - \Gamma_{0i}^\rho \Gamma_{0\rho}^i \\
 &= \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{00}^j - \Gamma_{0i}^0 \Gamma_{00}^i - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i,
 \end{aligned}$$

mas sabemos que $\Gamma_{00}^i = \Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^j = \Gamma_{0i}^0 = 0$, sendo assim

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0i}^i - \Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i.$$

Para resolver R_{00} , precisamos de cada um destes termos, então temos

$$\partial_0 \Gamma_{0i}^i = \frac{\partial}{\partial(t)} \left(c^{-1} \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j \right)$$

e para que $\delta^i_j \neq 0$, $i = j$, temos o resultado em $\delta^i_i = 3$. Logo:

$$\partial_0 \Gamma_{0i}^i = 3 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = 3 \left[\left(\frac{\partial a^{-1}}{\partial t} \right) \dot{a} + \left(\frac{\partial \dot{a}}{\partial t} \right) a^{-1} \right] = 3 \left[-a^{-2} \dot{a} \dot{a} + a^{-1} \ddot{a} \right] = 3 \left[(-1) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right].$$

O outro termo será

$$\Gamma_{0i}^j \Gamma_{0j}^i = \left(\frac{\dot{a}}{a} \delta^j_i \right) \left(\frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j \right) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 (\delta^j_i \delta^i_j) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \delta^i_i = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2.$$

Consequentemente,

$$R_{00} = -3 \left[(-1) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right] - 3c^{-2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -3 \frac{\ddot{a}}{a}.$$

Para estimar o que é R_{ij} , precisamos de $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{22}, R_{23}$ e R_{33} , uma vez que $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Isto resulta nas igualdades entre $R_{12} = R_{21}, R_{23} = R_{32}, R_{13} = R_{31}$. Dentro destes tensores de Ricci, serão necessários vários símbolos de Christoffel.

A priori, sabemos que as conexões diferentes de zero são $\Gamma_{ij}^0, \Gamma_{0j}^i$ e Γ_{jk}^i . Ao ramificar os índices i e j nesses símbolos, obtemos um total de 45 resultados. No entanto, com o objetivo de encurtar o apêndice, mencionarei apenas que, dentre todas essas conexões, as que são diferentes de zero são as seguintes: $\Gamma_{11}^0, \Gamma_{22}^0, \Gamma_{33}^0, \Gamma_{01}^1, \Gamma_{02}^2, \Gamma_{03}^3, \Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{33}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{13}^3, \Gamma_{33}^2$ e Γ_{23}^3 .⁵⁸ Dito isto, agora estimamos cada um deles. Contudo, precisamos especificar a métrica FLRW sendo

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-k(x^1)^2/R_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 (x^1)^2 \sin^2(x^2) \end{pmatrix},$$

e a métrica inversa será $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1}$. Todavia, a título de facilitar os cálculos, iremos alterar a variável na métrica. Então, definimos

$$\kappa \equiv \frac{k}{R_0^2}.$$

Sendo assim, a métrica FLRW será

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa (x^1)^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

$$= -dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa (x^1)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (\text{B.2})$$

Lembrando que o símbolo de Christoffel é dado pela Eq. (A.6), finalmente estamos munidos para começar o maquinário. Antes de calcularmos os símbolos que comentamos serem diferentes de zero, iremos exemplificar um símbolo que esteja fora da lista, mos-

⁵⁸Segundo a Ref.(Carroll, 2019), resultado sugerido na Eq. (8.44) na pág. 332.

trando porque ele é igual a zero. Assim, faremos Γ_{10}^0 :

$$\begin{aligned}\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_0g_{\nu 1} + \partial_1g_{0\nu} - \partial_\nu g_{10}) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_0g_{01} + \partial_1g_{00} - \partial_0g_{10}) + \frac{1}{2}g^{0i}(\partial_0g_{i1} + \partial_1g_{0i} - \partial_i g_{10}),\end{aligned}$$

e sabemos que $g^{i0} = 0$, dada a isotropia do Universo. A componente g_{00} é uma constante, então sua derivação resulta em zero, por fim:

$$\Gamma_{10}^0 = 0. \quad (\text{B.3})$$

Analogamente, podemos aplicar este raciocínio para as outras componentes que afirmamos anteriormente serem iguais a zero. Após esse resultado, migramos para os símbolos que nos importam. Iniciamos com Γ_{11}^0 fazendo:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_1g_{\nu 1} + \partial_1g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}),$$

reafirmando que $g^{0i} = 0$, quando ramificarmos $g^{0\nu}$ somente o termo g^{00} será diferente de zero. Daí

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{01} + \partial_1g_{10} - \partial_0g_{11}) = \frac{1}{2}(-1)(-\partial_0g_{11}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[a^2(t)\frac{1}{1-\kappa(x^1)^2}\right],$$

neste ponto, impomos que a velocidade da luz será considerada unitária. Escreveremos as coordenadas em termos de x^i . Isto é, $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$. Então

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{1}{2}(2\dot{a}a)\frac{1}{1-\kappa(x^1)^2} = \frac{\dot{a}a}{1-\kappa(x^1)^2}.$$

O próximo será Γ_{22}^0 , daí:

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_2g_{\nu 2} + \partial_2g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}),$$

com argumentos análogos ao primeiro termo, escrevemos

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{02} + \partial_2g_{20} - \partial_0g_{22}) = \frac{1}{2}(-1)(-\partial_0g_{22}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[a^2(t)(x^1)^2\right],$$

portanto

$$\Gamma_{22}^0 = (x^1)^2 \dot{a}a.$$

Assim por diante,

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}g^{0\nu} (\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) = \frac{1}{2}g^{00} (\partial_3 g_{03} + \partial_3 g_{30} - \partial_0 g_{33}),$$

então com argumentos de simetria,

$$\Gamma_{33}^0 = \frac{1}{2}(-1)(-\partial_0 g_{33}) = \frac{1}{2} \left[a^2 (x^1)^2 \sin^2(x^2) \right] = (x^1)^2 \sin^2(x^2) \dot{a}a.$$

Agora, termos derivados de Γ_{0j}^i serão calculados. Iniciamos com Γ_{01}^1 :

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{1\nu} (\partial_1 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{01}),$$

novamente, já que $g^{0i} = 0$, teremos

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2}g^{11} (\partial_1 g_{10} + \partial_0 g_{11}) = \frac{1}{2}g^{11} \partial_0 g_{11},$$

daí

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \kappa (x^1)^2}{a^2(t)} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{a^2(t)}{1 - \kappa (x^1)^2} \right] = \frac{1 - \kappa (x^1)^2}{1 - \kappa (x^1)^2} \frac{1}{2} \frac{1}{a^2(t)} (2\dot{a}a) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (\text{B.4})$$

O próximo será:

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2}g^{2\nu} (\partial_2 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{02}) = \frac{1}{2}g^{22} (\partial_2 g_{20} + \partial_0 g_{22}) = \frac{1}{2}g^{22} (\partial_0 g_{22}),$$

e substituímos as métricas

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2 (x^1)^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[a^2 (x^1)^2 \right] = \frac{1}{2a^2} (2\dot{a}a) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (\text{B.5})$$

E, como veremos, a conexão Γ_{03}^3 também resultará na expressão acima. Veja:

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2}g^{3\nu} (\partial_3 g_{\nu 0} + \partial_0 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{03}) = \frac{1}{2}g^{33} (\partial_3 g_{30} + \partial_0 g_{33}) = \frac{1}{2}g^{33} (\partial_0 g_{33}),$$

substituindo g^{33} e g_{33} , vemos:

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2 (x^1)^2 \sin^2 (x^2)} \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[a^2 (x^1)^2 \sin^2 (x^2) \right] = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (\text{B.6})$$

Estudaremos, a seguir, os termos derivados de Γ_{jk}^i . Iniciamos com Γ_{11}^1 ,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{1\nu} (\partial_1 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11}),$$

substituimos os tensores métricos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \kappa (x^1)^2}{a^2 (t)} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{a^2 (t)}{1 - \kappa (x^1)^2} \right] = \frac{1 - \kappa (x^1)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left[1 - \kappa (x^1)^2 \right]^{-1}.$$

Efetamos a derivação em relação à primeira coordenada espacial, o que resulta em

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1 - \kappa (x^1)^2}{2} \left\{ (-1) \left[1 - \kappa (x^1)^2 \right]^{-2} \left[-2\kappa (x^1)^2 \right] \right\},$$

e quando reorganizamos os termos, teremos

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\left[1 - \kappa (x^1)^2 \right]}{2} \frac{2\kappa (x^1)}{\left[1 - \kappa (x^1)^2 \right]^2} = \frac{\kappa (x^1)}{\left[1 - \kappa (x^1)^2 \right]}.$$

O próximo será:

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{1\nu} (\partial_2 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22}) = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{22}),$$

substituimos

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1 - \kappa (x^1)^2}{a^2 (t)} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left[a^2 (t) (x^1)^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[1 - \kappa (x^1)^2 \right] \cdot \left[2x^1 \right] \\ &= -x^1 \left(1 - \kappa (x^1)^2 \right). \end{aligned}$$

O último termo de Γ_{ij}^1 , onde $i = j$, será:

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{1\nu} (\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{31} - \partial_1 g_{33}) = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{33}),$$

daí

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1 - \kappa (x^1)^2 / R_0^2}{a^2(t)} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left[a^2(t) (x^1)^2 \sin^2(x^2) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[1 - \kappa (x^1)^2 / R_0^2 \right] [2(x^1) \sin^2(x^2)]\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\Gamma_{33}^1 = - (x^1) \left[1 - \kappa (x^1)^2 / R_0^2 \right] \sin^2(x^2).$$

Agora, fazemos:

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{2\nu} (\partial_2 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{2\nu} - \partial_\nu g_{12}) = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{21} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{12}) = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22}),$$

daí

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2(t) (x^1)^2} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left[a^2(t) (x^1)^2 \right] = \frac{1}{2(x^1)^2} [2(x^1)] = \frac{1}{(x^1)}.$$

Ademais, temos

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{3\nu} (\partial_3 g_{\nu 1} + \partial_1 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{13}) = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{31} + \partial_1 g_{33} - \partial_3 g_{13}) = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_1 g_{33}),$$

substituindo

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2(t) (x^1)^2 \sin^2(x^2)} \right] \frac{\partial}{\partial x^1} \left[a^2(t) (x^1)^2 \sin^2(x^2) \right] = \frac{1}{2(x^1)^2} [2(x^1)] = \frac{1}{(x^1)}.$$

Faltam apenas dois símbolos de Christoffel. Sendo eles Γ_{33}^2 e Γ_{23}^3 . Fazemos,

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{2\nu} (\partial_3 g_{\nu 3} + \partial_3 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_3 g_{23} + \partial_3 g_{32} - \partial_2 g_{33}) = \frac{1}{2} g^{22} (-\partial_2 g_{33}),$$

mais uma vez, substituimos os tensores métricos necessários

$$\Gamma_{33}^2 = \left[\frac{-1}{2a^2(x^1)^2} \right] \frac{\partial}{\partial x^2} \left[a^2(x^1)^2 \sin^2(x^2) \right] = \frac{-1}{2} [2 \sin(x^2) \cos(x^2)] = -\sin(x^2) \cos(x^2).$$

Finalmente,

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{3\nu} (\partial_3 g_{\nu 2} + \partial_2 g_{3\nu} - \partial_\nu g_{23}) = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_3 g_{32} + \partial_2 g_{33}) = \frac{1}{2} g^{33} (\partial_2 g_{33}),$$

substituimos a métrica

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2(t) (x^1)^2 \sin^2(x^2)} \right] \frac{\partial}{\partial x^2} \left[a^2(t) (x^1)^2 \sin^2(x^2) \right] = \frac{1}{2 \sin^2(x^2)} [2 \sin(x^2) \cos(x^2)],$$

concluimos

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)} = \cot(x^2).$$

Damos início à estimativa do R_{ij} . Para isso, começamos computando R_{11} . Então, rolamos a engrenagem

$$R_{11} = \partial_\lambda \Gamma_{11}^\lambda - \partial_1 \Gamma_{1\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{11}^\rho - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{1\rho}^\lambda,$$

ramificamos e dentro dos resultados vamos analisando os termos que sabemos que são diferente de zero e os que são iguais,

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_i \Gamma_{11}^i - \partial_1 \Gamma_{10}^0 - \partial_1 \Gamma_{1i}^i + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{11}^\rho + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{11}^\rho - \Gamma_{10}^\rho \Gamma_{1\rho}^0 - \Gamma_{1i}^\rho \Gamma_{1\rho}^i \\ &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 + \partial_2 \Gamma_{11}^2 + \partial_3 \Gamma_{11}^3 - \partial_1 \Gamma_{11}^1 - \partial_1 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{11}^j \\ &\quad - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{10}^j \Gamma_{1j}^0 - \Gamma_{1i}^0 \Gamma_{10}^i - \Gamma_{1i}^j \Gamma_{1j}^i \\ &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - 2\partial_1 \Gamma_{12}^2 + 2\Gamma_{20}^2 \Gamma_{11}^0 + 2\Gamma_{21}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1 - 2\Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2. \end{aligned}$$

Podemos agora substituir os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial}{\partial(x^0)} \left(\frac{a\dot{a}}{1 - \kappa(x^1)^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial(x^1)} \left(\frac{1}{x^1} \right) + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa(x^1)^2} \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{x^1} \right) \frac{\kappa(x^1)}{[1 - \kappa(x^1)^2]} - \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa(x^1)^2} \frac{\dot{a}}{a} - 2 \left(\frac{1}{x^1} \right)^2 \\ &= \frac{2\dot{a}^2 + 2\kappa + a\ddot{a}}{1 - \kappa(x^1)^2}. \end{aligned}$$

Faremos a seguir R_{12} , seguindo a mesma lógica aplicada acima. Vale lembrar que os símbolos diferente de zero são: $\Gamma_{11}^0, \Gamma_{22}^0, \Gamma_{33}^0, \Gamma_{01}^1, \Gamma_{02}^2, \Gamma_{03}^3, \Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{33}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{13}^3, \Gamma_{33}^2$ e Γ_{23}^3 . Então, fazemos

$$R_{12} = \partial_\lambda \Gamma_{12}^\lambda - \partial_2 \Gamma_{1\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{12}^\rho - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{2\rho}^\lambda,$$

e expandimos

$$\begin{aligned}
R_{12} &= \partial_0 \Gamma_{12}^0 + \partial_i \Gamma_{12}^i - \partial_2 \Gamma_{10}^0 - \partial_2 \Gamma_{1i}^i + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{12}^\rho + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{12}^\rho - \Gamma_{10}^\rho \Gamma_{2\rho}^0 - \Gamma_{1i}^\rho \Gamma_{2\rho}^i \\
&= \partial_1 \Gamma_{12}^1 + \partial_2 \Gamma_{12}^2 + \partial_3 \Gamma_{12}^3 - \partial_2 \Gamma_{11}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^2 - \partial_2 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{1\rho}^1 \Gamma_{12}^\rho + \Gamma_{2\rho}^2 \Gamma_{12}^\rho \\
&\quad + \Gamma_{3\rho}^3 \Gamma_{12}^\rho - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{10}^j \Gamma_{2j}^0 - \Gamma_{11}^\rho \Gamma_{2\rho}^1 - \Gamma_{12}^\rho \Gamma_{2\rho}^2 - \Gamma_{13}^\rho \Gamma_{2\rho}^3 \\
&= -\partial_2 \Gamma_{12}^2 - \partial_2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^3.
\end{aligned}$$

Substituimos as conexões:

$$R_{12} = -\frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{(x^1)} \right] - \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{\kappa(x^1)}{1 - \kappa(x^1)^2} \right] + \frac{\cot(x^2)}{(x^1)} - \frac{\cot(x^2)}{(x^1)} = 0.$$

A seguir, temos R_{13} , veja:

$$R_{13} = \partial_\lambda \Gamma_{13}^\lambda - \partial_3 \Gamma_{1\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{13}^\rho - \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{3\rho}^\lambda,$$

e ramificamos

$$\begin{aligned}
R_{13} &= \partial_0 \Gamma_{13}^0 + \partial_i \Gamma_{13}^i - \partial_3 \Gamma_{10}^0 - \partial_3 \Gamma_{1i}^i + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{13}^\rho + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{13}^\rho - \Gamma_{10}^\rho \Gamma_{3\rho}^0 - \Gamma_{1i}^\rho \Gamma_{3\rho}^i \\
&= \partial_1 \Gamma_{13}^1 + \partial_2 \Gamma_{13}^2 + \partial_3 \Gamma_{13}^3 - \partial_3 \Gamma_{11}^1 - \partial_3 \Gamma_{12}^2 - \partial_3 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{13}^0 + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{13}^j \\
&\quad - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{10}^j \Gamma_{3j}^0 - \Gamma_{1i}^0 \Gamma_{30}^i - \Gamma_{1i}^j \Gamma_{3j}^i \\
&= -\partial_3 \Gamma_{11}^1 - \partial_3 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{13}^3 \\
&\quad - \partial_3 \Gamma_{11}^1 - \partial_3 \Gamma_{13}^3,
\end{aligned}$$

Substituimos:

$$R_{13} = -\frac{\partial}{\partial(x^3)} \left[\frac{\kappa(x^1)}{1 - \kappa(x^1)^2} \right] - \frac{\partial}{\partial(x^3)} \left[\frac{1}{(x^1)} \right] = 0.$$

Na ordem, agora temos que efetuar R_{22} . Assim, escrevemos

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\lambda \Gamma_{22}^\lambda - \partial_2 \Gamma_{2\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{22}^\rho - \Gamma_{2\lambda}^\rho \Gamma_{2\rho}^\lambda \\
&= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_i \Gamma_{22}^i - \partial_2 \Gamma_{20}^0 - \partial_2 \Gamma_{2i}^i + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{22}^\rho + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{22}^\rho - \Gamma_{20}^\rho \Gamma_{2\rho}^0 - \Gamma_{2i}^\rho \Gamma_{2\rho}^i \\
&= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_i \Gamma_{22}^i - \partial_2 \Gamma_{2i}^i + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{22}^j - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{20}^j \Gamma_{2j}^0 - \Gamma_{2i}^0 \Gamma_{20}^i - \Gamma_{2i}^j \Gamma_{2j}^i \\
&= \partial_0 \Gamma_{22}^0 + \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{23}^3 + 2\Gamma_{10}^1 \Gamma_{22}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{22}^0 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, substituimos as conexões afins

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\dot{a} a (x^1)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial (x^1)} \left\{ \left[- (x^1) + \kappa (x^1)^3 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial (x^2)} [\cot (x^2)] + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{a} a (x^1)^2 \\
&+ \left[\frac{\kappa (x^1)}{1 - \kappa (x^1)^2} \right] \left\{ - (x^1) \left[1 - \kappa (x^1)^2 \right] \right\} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{a} a (x^1)^2 - [\cot (x^2)]^2 \\
&= (x^1)^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa).
\end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
R_{23} &= \partial_\lambda \Gamma_{23}^\lambda - \partial_3 \Gamma_{2\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{23}^\rho - \Gamma_{2\lambda}^\rho \Gamma_{3\rho}^\lambda \\
&= \partial_0 \Gamma_{23}^0 + \partial_i \Gamma_{23}^i - \partial_3 \Gamma_{20}^0 - \partial_3 \Gamma_{2i}^i + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{23}^\rho + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{23}^\rho - \Gamma_{20}^\rho \Gamma_{3\rho}^0 - \Gamma_{2i}^\rho \Gamma_{3\rho}^i \\
&= \partial_i \Gamma_{23}^i - \partial_3 \Gamma_{2i}^i + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{23}^\rho - \Gamma_{20}^\rho \Gamma_{3\rho}^0 - \Gamma_{2i}^\rho \Gamma_{3\rho}^i \\
&= \Gamma_{i1}^i \Gamma_{23}^1 + \Gamma_{i2}^i \Gamma_{23}^2 + \Gamma_{i3}^i \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{31}^0 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{32}^0 - \Gamma_{20}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{30}^1 - \Gamma_{21}^j \Gamma_{3j}^1 \\
&- \Gamma_{22}^0 \Gamma_{30}^2 - \Gamma_{22}^j \Gamma_{3j}^2 - \Gamma_{23}^0 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{23}^j \Gamma_{3j}^3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_\lambda \Gamma_{33}^\lambda - \partial_3 \Gamma_{3\lambda}^\lambda + \Gamma_{\lambda\rho}^\lambda \Gamma_{33}^\rho - \Gamma_{3\lambda}^\rho \Gamma_{3\rho}^\lambda \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_i \Gamma_{33}^i - \partial_3 \Gamma_{30}^0 - \partial_3 \Gamma_{3i}^i + \Gamma_{0\rho}^0 \Gamma_{33}^\rho + \Gamma_{i\rho}^i \Gamma_{33}^\rho - \Gamma_{3\lambda}^0 \Gamma_{30}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^j \Gamma_{3j}^\lambda \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_i \Gamma_{33}^i - \partial_3 \Gamma_{3i}^i + \Gamma_{i0}^i \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{33}^j - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{30}^0 - \Gamma_{3i}^0 \Gamma_{30}^i - \Gamma_{30}^j \Gamma_{3j}^0 - \Gamma_{3i}^j \Gamma_{3j}^i \\
&= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{20}^2 \Gamma_{33}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3,
\end{aligned}$$

e finalmente substituimos os símbolos:

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \frac{\partial}{\partial (x^0)} \left(a\dot{a} \sin^2 (x^2) (x^1)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial (x^1)} \left[- (x^1) \sin^2 (x^2) + \kappa (x^1)^3 \sin^2 (x^2) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial (x^2)} \left(- \sin (x^2) \cos (x^2) \right) + \frac{\dot{a}}{a} a\dot{a} \sin^2 (x^2) (x^1)^2 \\
&+ \frac{\kappa (x^1)}{1 - \kappa (x^1)^2} \left\{ - (x^1) \left[1 - \kappa (x^1)^2 \right] \right\} \sin^2 (x^2) + \sin (x^2) \cos (x^2) \frac{\cos (x^2)}{\sin (x^2)} \\
&= (x^1)^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2 (x^2)
\end{aligned}$$

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO TENSOR $T_{\mu\nu}$

A seguir, mostraremos como a lei de conservação covariante do tensor energia-momento leva à equação de Klein-Gordon (3.12). Alguns passos precisam ser aplicados. Primeiramente, sabemos da comutação entre δ e ∂ . Além disso, conhecemos o resultado expresso na Eq. (A.27), da Seção A do Apêndice A, juntamente com a identidade $g^{\mu\nu}g_{\mu\rho} = \delta^\nu_\rho$. Munidos disso, escrevemos

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Logo, a variação δ_g da ação do campo escalar (3.7) com respeito ao tensor métrico (contravariante) será:

$$\begin{aligned}\delta_g S &= \int d^4x \delta_g \left\{ \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - V(\phi) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right] \right\} \delta_g g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Com isso, estamos prontos para definir o termo dentro das chaves como o tensor energia-momento do campo escalar

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right]. \quad (\text{B.7})$$

Portanto,

$$\delta_g S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta_g g^{\mu\nu}.$$

Adiante, calcularemos o tensor energia-momento misto ao aplicarmos o tensor métrico para levantar um dos índices, veja:

$$T^\rho_\nu = g^{\rho\mu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g^{\rho\mu}g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right] = \partial^\rho\phi\partial_\nu\phi - \delta^\rho_\nu \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right].$$

Analisamos cada um dos termos de T^ρ_ν . Iniciamos com a componente temporal

$$\begin{aligned}T^0_0 &= \partial^0\phi\partial_0\phi - \delta^0_0 \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right] = \partial^0\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}g^{0\beta}\partial_0\phi\partial_\beta\phi - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial_0\phi - V(\phi).\end{aligned}$$

Estudaremos, então, a componente:

$$T^0_i = \partial^0 \phi \partial_i \phi - \delta^0_i \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right],$$

mas, já que sabemos que $\delta^0_i = 0$ e também que o campo escalar ϕ depende somente do tempo, pois estamos o considerando homogêneo e isotrópico, então $\partial_i \phi = 0$. Logo, $T^0_i = 0$. O mesmo é válido para T^i_0 . Nos resta estudar o caso onde T^i_j , que tem a forma

$$T^i_j = \partial^i \phi \partial_j \phi - \delta^i_j \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right].$$

Para que $\delta^i_j \neq 0$, é necessário que $i = j$. Assim,

$$T^i_j = 0 \partial^i \phi \partial_j \phi - \delta^i_j \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] = \delta^i_j \left[\frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - V(\phi) \right].$$

Estamos munidos de todos os componentes para montar o tensor energia-momento do campo escalar:

$$T^\rho_\nu = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - V(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - V(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - V(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - V(\phi) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Da Eq. (2.9), escrevemos o tensor energia-momento misto de um fluido perfeito para o campo ϕ na forma

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho_\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\phi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Agora, comparamos as componentes entre as Eqs. (B.8) e (B.9) e obtemos

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

como esperado, dado os resultados apresentados na Subseção 3.3. Também podemos obter

a equação de movimento do campo escalar (3.14) através da conservação de energia, ou seja, da aplicação de $\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = 0$. Para isso, usamos a forma contravariante da Eq. (B.7) quando subimos os dois índices covariantes, isto é, $T^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} T_{\mu\nu}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} T^{\rho\sigma} &= g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \\ &= g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g^{\rho\sigma} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \end{aligned}$$

Assim, a conservação para determinar a forma da conservação requer

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = \nabla_\rho \left\{ g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g^{\rho\sigma} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \right\},$$

onde ∇_ρ é um operador linear, portanto obedece $\nabla\{A+B\} = \nabla A + \nabla B$. Ademais, a RG é compatível com métrica e isto implica que a derivada covariante do tensor métrico é nula, ou seja, obedece a condição de metricidade (A.10). Assim, vemos que é permitido comutar o operador ∇_ρ com $g^{\rho\mu}$. Desta forma,

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = \nabla_\rho [g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi] - \nabla_\rho \left\{ g^{\rho\sigma} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] \right\}$$

portanto obtemos o resultado da aplicação do operador nabla do tensor energia-momento

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \nabla_\rho (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - g^{\rho\sigma} \nabla_\rho \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \quad (\text{B.10})$$

Observe que o conteúdo dos colchetes é um escalar (devido à contração interna dos índices α e β) e por isso definimos

$$J \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi). \quad (\text{B.11})$$

Consequentemente,

$$\nabla_\rho \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right] = \partial_\rho \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + V(\phi) \right]. \quad (\text{B.12})$$

Além disso, já que ϕ é um escalar, podemos definir

$$\partial_\mu \phi = \nabla_\mu \phi \equiv V_\mu. \quad (\text{B.13})$$

O termo V_μ é um tensor *rank* 1, devido ao fato que a derivada covariante é um tensor. O objeto $(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi)$ é:

$$(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = (V_\mu V_\nu) \equiv W_{\mu\nu}, \quad (\text{B.14})$$

isto é, a justaposição de dois tensores de *rank* um (V_μ e V_ν) resulta em um tensor de *rank* dois configurado como $(W_{\mu\nu})$. Por isso,

$$\nabla_\rho(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \nabla_\rho(V_\mu V_\nu) = \nabla_\rho(W_{\mu\nu}).$$

Agora expandimos a derivada covariante (que foi trabalhada na Seção A do Apêndice A)

$$\nabla_\rho W_{\mu\nu} = \partial_\rho W_{\mu\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda W_{\lambda\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda W_{\mu\lambda}$$

e retornamos para a forma em termos de V_μ :

$$\nabla_\rho(V_\mu V_\nu) = \partial_\rho(V_\mu V_\nu) + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda(V_\lambda V_\nu) + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda(V_\mu V_\lambda).$$

Com a Eq. (B.13), escrevemos

$$\nabla_\rho(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) = \partial_\rho(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda(\partial_\lambda\phi\partial_\nu\phi) + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda(\partial_\mu\phi\partial_\lambda\phi) \quad (\text{B.15})$$

e substituindo as Eqs. (B.12) e (B.15) na Eq. (B.10), concluímos:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho T^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} & \left[\partial_\rho(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda(\partial_\lambda\phi\partial_\nu\phi) \right. \\ & \left. + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda(\partial_\mu\phi\partial_\lambda\phi) \right] - g^{\rho\sigma} \partial_\rho \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

O próximo passo é especificar a Eq. (B.16) para o *background* homogêneo e isotrópico da cosmologia. Isso significa que usamos o tensor métrico FLRW covariante⁵⁹

$$\begin{cases} g_{00} = -1 \\ g_{11} = \frac{a^2(t)}{1-kr^2/R_0^2} \\ g_{22} = a^2(t) r^2 \\ g_{33} = a^2(t) r^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

⁵⁹Confira a Eq. (2.17) da Ref. (Baumann, 2022) e também a Eq. (2.5).

isto é, $g_{0i} = 0$ e $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Como já sabemos, o campo ϕ depende somente do tempo para que respeite o PC. Com isso, dotados da Eq. (B.17) e $\phi(t)$, a Eq. (B.16) simplifica para

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} T^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} & \left[\partial_{\rho} (\partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi) + \Gamma_{\rho\mu}^0 (\partial_0 \phi \partial_{\nu} \phi) + \Gamma_{\rho\nu}^0 (\partial_{\mu} \phi \partial_0 \phi) \right] \\ & - g^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \left[\frac{1}{2} g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + V(\phi) \right]. \end{aligned}$$

Utilizando a notação $\partial_0 \phi = \dot{\phi}$ temos

$$\nabla_{\rho} T^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \left[\partial_{\rho} (\partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi) + \Gamma_{\rho\mu}^0 (\dot{\phi}) \partial_{\nu} \phi + \Gamma_{\rho\nu}^0 \partial_{\mu} \phi (\dot{\phi}) \right] - g^{\rho\sigma} \partial_{\rho} \left[\frac{1}{2} (-1) (\dot{\phi}) (\dot{\phi}) + V(\phi) \right]$$

e quando distribuirmos os tensores métricos e também contraímos o índice ρ no último termo, vemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} T^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_{\rho} (\partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi) + g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\mu}^0 (\dot{\phi}) \partial_{\nu} \phi \\ + g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\nu}^0 \partial_{\mu} \phi (\dot{\phi}) - g^{0\sigma} \partial_0 \left[-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \end{aligned}$$

e expandimos alguns índices contravariantes

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} T^{\rho\sigma} = g^{\rho 0} g^{\sigma 0} \partial_{\rho} (\partial_0 \phi \partial_0 \phi) + g^{\rho\mu} g^{\sigma 0} \Gamma_{\rho\mu}^0 (\dot{\phi}) (\partial_0 \phi) + g^{\rho 0} g^{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\nu}^0 (\partial_0 \phi) (\dot{\phi}) \\ - g^{0\sigma} \left[-\frac{1}{2} \partial_0 (\dot{\phi}^2) + \partial_0 V(\phi) \right], \end{aligned}$$

esse resultado corresponde a

$$\nabla_{\rho} T^{\rho\sigma} = g^{00} g^{\sigma 0} \partial_0 (\dot{\phi}^2) + [g^{\rho\mu} g^{\sigma 0} \Gamma_{\rho\mu}^0 + g^{\rho 0} g^{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\nu}^0] \dot{\phi}^2 - g^{0\sigma} \left[-(\dot{\phi} \partial_0 \dot{\phi}) + \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi) \right].$$

Lembramos que em $g^{0\sigma}$ o único termo diferente de zero é $g^{00} = -1$ para $\sigma = 0$ e por isso podemos escrever

$$g^{0\sigma} = -\delta^{0\sigma}$$

onde $\delta^{\rho\sigma}$ é o símbolo de Kronecker. Portanto,

$$\nabla_{\rho} T^{\rho\sigma} = (-1) (-\delta^{\sigma 0}) (2\dot{\phi}\ddot{\phi}) + [g^{\rho\mu} (-\delta^{\sigma 0}) \Gamma_{\rho\mu}^0 + (-\delta^{\rho 0}) g^{\sigma\nu} \Gamma_{\rho\nu}^0] \dot{\phi}^2 - (-\delta^{0\sigma}) \left[-\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi} \frac{dV}{d\phi} \right]$$

sendo $\ddot{\phi} = \partial_0 \dot{\phi} = \partial_0 \partial_0 \phi$. É fato que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi) = \frac{dV}{d\phi},$$

já que V depende de ϕ contudo não de $\dot{\phi}$ por hipótese. Assim,

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = \delta^{\sigma 0} \left(2\dot{\phi}\ddot{\phi} \right) - [g^{\rho\mu} \delta^{\sigma 0} \Gamma_{\rho\mu}^0 + \delta^{00} g^{\sigma\nu} \Gamma_{0\nu}^0] \dot{\phi}^2 + \delta^{0\sigma} \left[-\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi} \frac{dV}{d\phi} \right].$$

Todavia, para a métrica FLRW sabemos⁶⁰

$$\Gamma_{0\nu}^0 = 0, \quad (\text{B.18})$$

de modo que o último termo da primeira linha seja nulo. Além disso, o primeiro termo da primeira linha combina com a segunda linha e ratificamos que usamos a propriedade de simetria, ou seja, $\delta^{\sigma 0} = \delta^{0\sigma}$. Então

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = -\delta^{\sigma 0} [g^{0\mu} \Gamma_{0\mu}^0 + g^{i\mu} \Gamma_{i\mu}^0] \dot{\phi}^2 + \delta^{0\sigma} \left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi} \frac{dV}{d\phi} \right].$$

O primeiro termo é novamente do tipo $\Gamma_{0\mu}^0$ e desaparece devido à Eq. (B.18), daí

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = -\delta^{\sigma 0} [g^{i0} \Gamma_{i0}^0 + g^{ij} \Gamma_{ij}^0] \dot{\phi}^2 + \delta^{0\sigma} \left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi} \frac{dV}{d\phi} \right] = -\delta^{\sigma 0} [g^{ij} \Gamma_{ij}^0] \dot{\phi}^2 + \delta^{0\sigma} \left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi} \frac{dV}{d\phi} \right] \quad (\text{B.19})$$

mas

$$g^{ij} \Gamma_{ij}^0 = g^{11} \Gamma_{11}^0 + g^{22} \Gamma_{22}^0 + g^{33} \Gamma_{33}^0$$

com

$$\begin{cases} g^{00} = -1 \\ g^{11} = \frac{1-kr^2/R_0^2}{a^2(t)} \\ g^{22} = \frac{1}{a^2(t)r^2} \\ g^{33} = \frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

⁶⁰Confira a Eq. (B.3).

e

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^0 = \frac{1}{1-kr^2/R_0^2} a\dot{a} \\ \Gamma_{22}^0 = r^2 a\dot{a} \\ \Gamma_{33}^0 = r^2 \sin^2 \theta a\dot{a} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

conforme Seção ?? desse Apêndice. Assim, temos

$$\begin{aligned} g^{ij}\Gamma_{ij}^0 &= g^{11}\Gamma_{11}^0 + g^{22}\Gamma_{22}^0 + g^{33}\Gamma_{33}^0 \\ &= \left(\frac{1-kr^2/R_0^2}{a^2(t)} \right) \left(\frac{1}{1-kr^2/R_0^2} a\dot{a} \right) + \left(\frac{1}{a^2(t)r^2} \right) (r^2 a\dot{a}) \\ &\quad + \left(\frac{1}{a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \right) (r^2 \sin^2 \theta a\dot{a}) \\ &= \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a} = 3\frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned}$$

Todavia, sabemos $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, então

$$g^{ij}\Gamma_{ij}^0 = 3H. \quad (\text{B.22})$$

Substituindo a Eq. (B.22) na (B.19) obtemos

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = -\delta^{\sigma 0} [3H] \dot{\phi}^2 + \delta^{0\sigma} \left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi} \frac{dV}{d\phi} \right]$$

isto é,

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = \delta^{0\sigma} \dot{\phi} \left[\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \right]. \quad (\text{B.23})$$

Mas a conservação de energia requer que essa derivação covariante resulte em zero, por isso

$$\nabla_\rho T^{\rho\sigma} = \delta^{0\sigma} \dot{\phi} \left[\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} \right] = 0$$

pode ser satisfeita quando $\dot{\phi} = 0$, porém isto implicaria que não haveria dinâmica associada e desta forma a possibilidade é descartada. Assim, nos resta

$$\boxed{\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0}. \quad (\text{B.24})$$

Essa possibilidade é precisamente a equação de Klein-Gordon.

SOLUÇÕES DO FATOR DE ESCALA NAS ERAS DE RADIAÇÃO, MATÉRIA E CONSTANTE COSMOLÓGICA

Com a equação de Friedmann,

$$H^2 = H_0^2 \Omega_i a^{-3(1+w_i)}.$$

aplicamos a condição de Big Bang,⁶¹ na equação acima. Então, fazemos

$$\int_0^a \frac{1}{a'} \frac{da'}{dt'} = \int_0^t H_0 \sqrt{\Omega_i} a'^{-\frac{3}{2}(1+w_i)},$$

agora reorganizamos

$$\int_0^a \frac{1}{a' a'^{-\frac{3}{2}(1+w_i)}} da' = \int_0^t H_0 \sqrt{\Omega_i} dt'.$$

Somamos os índices do fator de escala no lado esquerdo da equação, ou seja

$$a'^1 a'^{-\frac{3}{2}(1+w_i)} = a'^{-\frac{(1+3w_i)}{2}},$$

daí

$$\int_0^a \frac{da'}{a'^{-\frac{(1+3w_i)}{2}}} = H_0 \sqrt{\Omega_i} \int_0^t dt'$$

e resolvemos o lado esquerdo dessa igualdade como um polinômio. Assim,

$$\frac{(1+3w_i)}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{3w_i}{2} + \frac{2}{2} = 3 \frac{(1+w_i)}{2},$$

então

$$\left. \frac{a'^3 \frac{(1+w_i)}{2}}{3 \frac{(1+w_i)}{2}} \right|_{a'=0}^{a'=a} = H_0 \sqrt{\Omega_i} t,$$

e efetuamos a substituição

$$a^{3 \frac{(1+w_i)}{2}} = 3 \frac{(1+w_i)}{2} H_0 \sqrt{\Omega_i} t.$$

⁶¹Os limites de integração estão dentro dos intervalos $0 < a' < a$ e $0 < t' < t$.

Como queremos descobrir $a(t)$, fazemos

$$\left[a^{3\frac{(1+w_i)}{2}} \right]^{\frac{2}{3(1+w_i)}} = \left[3\frac{(1+w_i)}{2} H_0 \sqrt{\Omega_i t} \right]^{\frac{2}{3(1+w_i)}}$$

então

$$a(t) = \left[\frac{3}{2} (1+w_i) H_0 \sqrt{\Omega_i t} \right]^{\frac{2}{3(1+w_i)}}.$$

Definimos

$$\frac{1}{t_0} \equiv \frac{3}{2} (1+w_i) H_0 \sqrt{\Omega_i}$$

e escrevemos

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w_i)}}. \quad (\text{B.25})$$

Reforçamos que a Eq. (B.25) é válida para $w \neq -1$. Especificamos o resultado para radiação e matéria, respectivamente:

$$\begin{aligned} w = 0, a(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \\ w = 1/3, a(t) &= \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Para encontrar $a(t)$ na era da constante Λ podemos aplicar as condições iniciais

$$\begin{cases} \rho = \kappa = 0, & \Lambda \neq 0, \\ \rho = \rho_\Lambda = \text{cte}, & \kappa = \Lambda = 0. \end{cases}$$

Escolhemos a segunda opção. Desta forma, a Eq. (2.25) será

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda \rightarrow \frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_\Lambda}{\frac{3H_0^2}{8\pi G}},$$

portanto

$$H^2 = H_0^2 \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{c,0}} = H_0^2 \Omega_\Lambda.$$

Dito isso, escrevemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} \quad (\text{B.26})$$

e integramos dada condição de Big Bang:

$$\int_0^a \frac{da'}{a'} = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} \int_0^t dt'. \quad (\text{B.27})$$

Efetuada a integração, temos

$$\ln(a') \Big|_{a'=0}^{a'=a} = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t \Rightarrow \ln a = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t.$$

Por conseguinte, para isolarmos o fator de escala precisamos aplicar a exponenciação em ambos os lados:

$$a(t) = \exp\left(H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t\right).$$

Este é o resultado para a era da constante cosmológica, $w = -1$.

APÊNDICE C ~ TRANSFORMAÇÃO CONFORME

ESCALAR DE RICCI CONFORME

Sabemos que a transformação conforme é definida como

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (\text{C.1})$$

e conhecemos também a condição de ortogonalidade

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \quad \text{e} \quad \tilde{g}^{\mu\rho} \tilde{g}_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu,$$

bem como a métrica inversa:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{\mu\rho} \tilde{g}_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu &\Rightarrow \tilde{g}^{\mu\rho} (\Omega^2 g_{\rho\nu}) = \delta^\mu_\nu \Rightarrow \tilde{g}^{\mu\rho} (\Omega^2 g_{\rho\nu} g^{\nu\sigma}) = \delta^\mu_\nu g^{\nu\sigma} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tilde{g}^{\mu\rho} (\Omega^2 \delta^\sigma_\rho) = g^{\mu\sigma} \Rightarrow \tilde{g}^{\mu\sigma} \Omega^2 = g^{\mu\sigma} \Rightarrow \tilde{g}^{\mu\sigma} = \frac{1}{\Omega^2} g^{\mu\sigma}, \end{aligned}$$

isto é

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \Omega^{-2}(x) g^{\mu\nu}(x).$$

Então, o símbolo de Christoffel transformado conformemente será:

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\sigma} \left(\tilde{\partial}_\mu \tilde{g}_{\nu\sigma} + \tilde{\partial}_\nu \tilde{g}_{\sigma\mu} - \tilde{\partial}_\sigma \tilde{g}_{\mu\nu} \right)$$

notando que $\tilde{\partial}_\mu = \partial_\mu$, pois as transformações conformes não atuam no sistema de coordenadas senão no tensor métrico. Então, substituímos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\Omega^{-2} g^{\rho\sigma}) \left[\Omega^2 \partial_\mu g_{\nu\sigma} + \Omega^2 \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \Omega^2 \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Omega^{-2} g^{\rho\sigma}) \left[g_{\nu\sigma} \partial_\mu \Omega^2 + g_{\sigma\mu} \partial_\nu \Omega^2 - g_{\mu\nu} \partial_\sigma \Omega^2 \right]. \end{aligned}$$

e distribuimos

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\rho\sigma}[\Omega^2\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \Omega^2\partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \Omega^2\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\rho\sigma}[g_{\nu\sigma}\partial_{\mu}\Omega^2 + g_{\sigma\mu}\partial_{\nu}\Omega^2 - g_{\mu\nu}\partial_{\sigma}\Omega^2].$$

Resolvemos,

$$\partial_{\mu}\Omega^2 = 2\Omega\partial_{\mu}\Omega$$

então

$$\frac{1}{2}\Omega^{-2}\partial_{\mu}\Omega^2 = \frac{1}{2}\Omega^{-2}(2\Omega\partial_{\mu}\Omega) = \frac{1}{\Omega}\partial_{\mu}\Omega = \partial_{\mu}\ln\Omega.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} &= (\Omega^{-2}\Omega^2)\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \\ &+ g^{\rho\sigma}\left[g_{\nu\sigma}\left(\frac{1}{2}\Omega^{-2}\partial_{\mu}\Omega^2\right) + g_{\sigma\mu}\left(\frac{1}{2}\Omega^{-2}\partial_{\nu}\Omega^2\right) - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\Omega^{-2}\partial_{\sigma}\Omega^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \\ &+ [(g^{\rho\sigma}g_{\nu\sigma})(\partial_{\mu}\ln\Omega) + (g^{\rho\sigma}g_{\sigma\mu})(\partial_{\nu}\ln\Omega) - (g^{\rho\sigma}g_{\mu\nu})(\partial_{\sigma}\ln\Omega)].\end{aligned}$$

O primeiro termo no lado direito reconhecemos sendo o símbolo de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}).$$

Assim,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \delta^{\rho}_{\nu}\partial_{\mu}\ln\Omega + \delta^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}\ln\Omega - g_{\mu\nu}\partial^{\rho}\ln\Omega$$

i.e.

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \delta^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}\ln\Omega + \delta^{\rho}_{\nu}\partial_{\mu}\ln\Omega - g_{\mu\nu}\partial^{\rho}\ln\Omega.}$$

Definindo $\omega \equiv \ln\Omega$, escrevemos:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \delta^{\rho}_{(\mu}\partial_{\nu)}\omega - g_{\mu\nu}\partial^{\rho}\omega,$$

onde

$$\delta^{\rho}_{(\mu}\partial_{\nu)}\omega \equiv \delta^{\rho}_{\mu}\partial_{\nu}\omega + \delta^{\rho}_{\nu}\partial_{\mu}\omega.$$

Mais compactamente:

$$\boxed{\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + \Delta_{\mu\nu}^{\rho}}.$$

com

$$\boxed{\Delta_{\mu\nu}^{\rho} \equiv \delta^{\rho}_{(\mu} \partial_{\nu)} \omega - g_{\mu\nu} \partial^{\rho} \omega}. \quad (\text{C.2})$$

O tensor de curvatura é dado na Eq. (A.9):

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}.$$

Note que:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = (\partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}) - (\partial_{\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}) = (\partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}) - (\rho \leftrightarrow \sigma).$$

Fazendo

$$\Xi^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv (\partial_{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda})$$

então

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Xi^{\mu}_{\nu\rho\sigma} - \Xi^{\mu}_{\nu\sigma\rho}$$

pode ser escrito de uma forma mais reduzida:

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Xi^{\mu}_{\nu[\rho\sigma]},$$

dada a definição

$$\Xi^{\mu}_{\nu[\rho\sigma]} \equiv \Xi^{\mu}_{\nu\rho\sigma} - \Xi^{\mu}_{\nu\sigma\rho}.$$

Para o tensor de curvatura conforme:

$$\tilde{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \left(\partial_{\rho} \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\mu} + \tilde{\Gamma}_{\rho\lambda}^{\mu} \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\lambda} \right) - (\rho \leftrightarrow \sigma) = \tilde{\Xi}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) = \tilde{\Xi}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} - \tilde{\Xi}^{\mu}_{\nu\sigma\rho}.$$

o termo relevante é

$$\tilde{\Xi}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_{\rho} \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\mu} + \tilde{\Gamma}_{\rho\lambda}^{\mu} \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^{\lambda}.$$

Em termos da métrica original, temos

$$\tilde{\Xi}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv \partial_{\rho} (\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} + \Delta^{\mu}_{\nu\sigma}) + (\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} + \Delta^{\mu}_{\rho\lambda}) (\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \Delta^{\lambda}_{\nu\sigma})$$

daí

$$\tilde{\Xi}^\mu_{\nu\rho\sigma} = (\partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}) + (\partial_\rho \Delta^\mu_{\nu\sigma} + \Delta^\mu_{\rho\lambda} \Delta^\lambda_{\nu\sigma}) + (\Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Delta^\lambda_{\nu\sigma} + \Delta^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}),$$

observe o aparecimento de $\Xi^\mu_{\nu\rho\sigma}$ e de um objeto semelhante em termos de $\Delta^\mu_{\nu\sigma}$, ou seja

$$\Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv (\partial_\rho \Delta^\mu_{\nu\sigma} + \Delta^\mu_{\rho\lambda} \Delta^\lambda_{\nu\sigma}).$$

Também existe um termo cruzado

$$\Psi^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv (\Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Delta^\lambda_{\nu\sigma} + \Delta^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}).$$

Logo,

$$\tilde{\Xi}^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv \Xi^\mu_{\nu\rho\sigma} + \Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} + \Psi^\mu_{\nu\rho\sigma}.$$

Colocando isto na última expressão para o tensor conforme de curvatura, vemos

$$\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = \tilde{\Xi}^\mu_{\nu\rho\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma) = \Xi^\mu_{\nu\rho\sigma} + \Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} + \Psi^\mu_{\nu\rho\sigma} - (\rho \leftrightarrow \sigma)$$

i.e.

$$\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Xi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]}.$$

O primeiro termo do lado direito é o tensor de curvatura em termos da métrica original, $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$. Ficamos assim com:

$$\boxed{\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = R^\mu_{\nu\rho\sigma} + \Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]}}.$$

A próxima tarefa é estudar os dois últimos termos da equação acima. Começamos com $\Theta^\mu_{\nu\rho\sigma}$, seja

$$\Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv (\partial_\rho \Delta^\mu_{\nu\sigma} + \Delta^\mu_{\rho\lambda} \Delta^\lambda_{\nu\sigma})$$

e substituimos os Δ respectivos:

$$\Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \left[\delta^\mu_{(\nu} \partial_{\sigma)} \omega - g_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega \right] + \left[\delta^\mu_{(\rho} \partial_{\lambda)} \omega - g_{\rho\lambda} \partial^\mu \omega \right] \left[\delta^\lambda_{(\nu} \partial_{\sigma)} \omega - g_{\nu\sigma} \partial^\lambda \omega \right].$$

Daí expandimos os termos $\delta^\mu_{(\rho}\partial_\lambda)\omega$ e $\delta^\lambda_{(\nu}\partial_\sigma)\omega$ veja:

$$\begin{aligned}\Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \partial_\rho [\delta^\mu_\nu \partial_\sigma \omega + \delta^\mu_\sigma \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega] + [\delta^\mu_\rho \partial_\lambda \omega + \delta^\mu_\lambda \partial_\rho \omega - g_{\rho\lambda} \partial^\mu \omega] \\ &\times [\delta^\lambda_\nu \partial_\sigma \omega + \delta^\lambda_\sigma \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \partial^\lambda \omega].\end{aligned}$$

Reorganizamos para aplicar a propriedade distributiva e eventualmente fazer as possíveis contrações. Alguns termos irão combinar-se e outros cancelar, daí

$$\begin{aligned}\Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} &= [\delta^\mu_\nu \partial_\rho \partial_\sigma \omega + \delta^\mu_\sigma \partial_\rho \partial_\nu \omega - \partial_\rho g_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega - g_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial^\mu \omega] \\ &+ [\delta^\mu_\rho \partial_\nu \omega \partial_\sigma \omega + \delta^\mu_\rho \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega - \delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma} (\partial_\lambda \omega \partial^\lambda \omega)] \\ &+ [\delta^\mu_\nu \partial_\rho \omega \partial_\sigma \omega + \delta^\mu_\sigma \partial_\rho \omega \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \partial_\rho \omega \partial^\mu \omega] \\ &+ [-g_{\rho\nu} \partial^\mu \omega \partial_\sigma \omega - g_{\rho\sigma} \partial^\mu \omega \partial_\nu \omega + g_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega \partial_\rho \omega].\end{aligned}$$

Reorganizamos, novamente e vamos considerar um termo similar à $\Theta^\mu_{\nu\sigma\rho}$:

$$\begin{aligned}\Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \delta^\mu_\nu \partial_\sigma \partial_\rho \omega + \delta^\mu_\rho \partial_\sigma \partial_\nu \omega - g_{\nu\rho} \partial_\sigma \partial^\mu \omega - \partial_\sigma g_{\nu\rho} \partial^\mu \omega + 2\delta^\mu_\sigma \partial_\nu \omega \partial_\rho \omega \\ &+ \delta^\mu_\nu \partial_\sigma \omega \partial_\rho \omega + \delta^\mu_\rho \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega - \delta^\mu_\sigma g_{\nu\rho} (\partial_\lambda \omega \partial^\lambda \omega) - g_{\sigma\nu} \partial^\mu \omega \partial_\rho \omega - g_{\sigma\rho} \partial^\mu \omega \partial_\nu \omega.\end{aligned}$$

Agora, o objeto simétrico de $\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]}$:

$$\begin{aligned}\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &\equiv \Theta^\mu_{\nu\rho\sigma} - \Theta^\mu_{\nu\sigma\rho} = \delta^\mu_\nu \partial_\rho \partial_\sigma \omega + \delta^\mu_\sigma \partial_\rho \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial^\mu \omega - \partial_\rho g_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega \\ &+ 2\delta^\mu_\rho \partial_\nu \omega \partial_\sigma \omega + \delta^\mu_\nu \partial_\rho \omega \partial_\sigma \omega + \delta^\mu_\sigma \partial_\rho \omega \partial_\nu \omega \\ &- \delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma} (\partial_\lambda \omega \partial^\lambda \omega) - g_{\rho\nu} \partial^\mu \omega \partial_\sigma \omega - g_{\rho\sigma} \partial^\mu \omega \partial_\nu \omega \\ &- \delta^\mu_\nu \partial_\sigma \partial_\rho \omega - \delta^\mu_\rho \partial_\sigma \partial_\nu \omega + g_{\nu\rho} \partial_\sigma \partial^\mu \omega + \partial_\sigma g_{\nu\rho} \partial^\mu \omega \\ &- 2\delta^\mu_\sigma \partial_\nu \omega \partial_\rho \omega - \delta^\mu_\nu \partial_\sigma \omega \partial_\rho \omega - \delta^\mu_\rho \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega \\ &+ \delta^\mu_\sigma g_{\nu\rho} (\partial_\lambda \omega \partial^\lambda \omega) + g_{\sigma\nu} \partial^\mu \omega \partial_\rho \omega + g_{\sigma\rho} \partial^\mu \omega \partial_\nu \omega.\end{aligned}$$

Novamente, alguns termos irão desaparecer, portanto:

$$\begin{aligned}
\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= \delta^\mu_\sigma \partial_\rho \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial^\mu \omega - \partial_\rho g_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega + \delta^\mu_\rho \partial_\nu \omega \partial_\sigma \omega \\
&\quad - \delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma} (\partial_\lambda \omega \partial^\lambda \omega) - g_{\rho\nu} \partial^\mu \omega \partial_\sigma \omega \\
&\quad - \delta^\mu_\rho \partial_\sigma \partial_\nu \omega + g_{\nu\rho} \partial_\sigma \partial^\mu \omega + \partial_\sigma g_{\nu\rho} \partial^\mu \omega \\
&\quad - \delta^\mu_\sigma \partial_\nu \omega \partial_\rho \omega + \delta^\mu_\sigma g_{\nu\rho} (\partial_\lambda \omega \partial^\lambda \omega) + g_{\sigma\nu} \partial^\mu \omega \partial_\rho \omega.
\end{aligned}$$

Este é o resultado final para $\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]}$. Compactamente:

$$\begin{aligned}
\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= \left[\delta^\mu_\sigma \partial_\rho \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \partial_\rho \partial^\mu \omega - \partial_\rho g_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega \right. \\
&\quad \left. + \delta^\mu_\rho \partial_\nu \omega \partial_\sigma \omega - \delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma} (\partial_\lambda \omega \partial^\lambda \omega) - g_{\rho\nu} \partial^\mu \omega \partial_\sigma \omega \right] \\
&\quad - (\rho \leftrightarrow \sigma).
\end{aligned}$$

Proseguimos para computar $\Psi^\mu_{\nu\rho\sigma}$. Sendo

$$\Psi^\mu_{\nu\rho\sigma} \equiv (\Gamma^\mu_{\rho\lambda} \Delta^\lambda_{\nu\sigma} + \Delta^\mu_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}),$$

onde lembramos que o delta seja (C.2). Então,

$$\begin{aligned}
\Psi^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \Gamma^\mu_{\rho\lambda} (\delta^\lambda_\nu \partial_\sigma \omega + \delta^\lambda_\sigma \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \partial^\lambda \omega) + (\delta^\mu_\rho \partial_\lambda \omega + \delta^\mu_\lambda \partial_\rho \omega - g_{\rho\lambda} \partial^\mu \omega) \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \\
&= \Gamma^\mu_{\rho\nu} \partial_\sigma \omega + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \partial^\lambda \omega + \delta^\mu_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \partial_\lambda \omega + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \partial_\rho \omega - g_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega.
\end{aligned}$$

Similarmente, o objeto $\Psi^\mu_{\nu\sigma\rho}$ é:

$$\Psi^\mu_{\nu\sigma\rho} = \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \partial_\rho \omega + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \partial_\nu \omega - g_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \partial^\lambda \omega + \delta^\mu_\sigma \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \partial_\lambda \omega + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \partial_\sigma \omega - g_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \partial^\mu \omega$$

e o objeto antissimétrico $\Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]}$ será:

$$\begin{aligned}
\Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &\equiv \Psi^\mu_{\nu\rho\sigma} - \Psi^\mu_{\nu\sigma\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu} \partial_\sigma \omega + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \partial^\lambda \omega + \delta^\mu_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \partial_\lambda \omega \\
&\quad + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \partial_\rho \omega - g_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \partial^\mu \omega - \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \partial_\rho \omega \\
&\quad - \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \partial_\nu \omega + g_{\nu\rho} \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \partial^\lambda \omega - \delta^\mu_\sigma \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \partial_\lambda \omega - \Gamma^\mu_{\nu\rho} \partial_\sigma \omega + g_{\sigma\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} \partial^\mu \omega.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Gamma^\mu_{\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\rho}$. Concluimos que alguns dos termos acima cancelam-se:

$$\Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} = -g_{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\lambda}\partial^\lambda\omega + \delta^\mu_\rho\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial_\lambda\omega - g_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial^\mu\omega + g_{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\partial^\lambda\omega - \delta^\mu_\sigma\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\partial_\lambda\omega + g_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}\partial^\mu\omega.$$

Este já é o resultado final para $\Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]}$. Podemos escrever mais compacto:

$$\Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} = [-g_{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\lambda}\partial^\lambda\omega + \delta^\mu_\rho\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial_\lambda\omega - g_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial^\mu\omega] - (\rho \leftrightarrow \sigma).$$

Agora, a soma será

$$\begin{aligned} \Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= [\delta^\mu_\sigma\partial_\rho\partial_\nu\omega - g_{\nu\sigma}\partial_\rho\partial^\mu\omega - \partial_\rho g_{\nu\sigma}\partial^\mu\omega + \delta^\mu_\rho\partial_\nu\omega\partial_\sigma\omega - \delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma}(\partial_\lambda\omega\partial^\lambda\omega) \\ &\quad - g_{\rho\nu}\partial^\mu\omega\partial_\sigma\omega - g_{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\rho\lambda}\partial^\lambda\omega + \delta^\mu_\rho\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial_\lambda\omega - g_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial^\mu\omega] - (\rho \leftrightarrow \sigma). \end{aligned}$$

Iremos comparar com o resultado do Apêndice da Ref. (Wald, 1984) (D.7):

$$\begin{aligned} \Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= [\delta^\mu_\sigma\partial_\rho\partial_\nu\omega + \delta^\mu_\rho\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial_\lambda\omega \\ &\quad + \partial_\sigma\omega\delta^\mu_\rho\partial_\nu\omega - \partial_\sigma\omega g_{\rho\nu}g^{\mu\alpha}\partial_\alpha\omega \\ &\quad - g_{\nu\sigma}\delta^\mu_\rho g^{\lambda\alpha}\partial_\lambda\omega\partial_\alpha\omega \\ &\quad - \partial_\rho g_{\nu\sigma}\partial^\mu\omega - g_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\partial^\mu\omega] - (\rho \leftrightarrow \sigma). \end{aligned}$$

As primeiras três linhas já comparam com o resultado da Ref. (Wald, 1984). A primeira linha será comparada com o termo do livro do Wald, Ref. (Wald, 1984), que possui $\delta\nabla\nabla$ [o segundo termo na segunda linha da Eq. (D.7)] depois de fazermos uso da antissimetria pela mudança $\rho \leftrightarrow \sigma$. A última linha em nossa equação acima diz:

$$Y^\mu_{\nu[\rho\sigma]} \equiv -(\partial_\rho g_{\nu\sigma} + g_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma})\partial^\mu\omega - (\rho \leftrightarrow \sigma).$$

Expandimos o símbolo de Christoffel e efetuamos os cálculos:

$$\begin{aligned}
Y^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= - \left[\partial_\rho g_{\nu\sigma} + g_{\rho\lambda} \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\sigma g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\sigma}) \right] \partial^\mu \omega - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\
&= - \left[\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} (\partial_\sigma g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\rho g_{\nu\sigma}) \right] \partial^\mu \omega - (\rho \leftrightarrow \sigma) \\
&= - \left[\frac{1}{2} \partial_\rho g_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\rho\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\sigma\rho} \right] \partial^\mu \omega - \left(- \left[\frac{1}{2} \partial_\sigma g_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\rho\sigma} \right] \partial^\mu \omega \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= [\delta^\mu_\sigma \partial_\rho \partial_\nu \omega + \delta^\mu_\rho \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \partial_\lambda \omega - g_{\nu\sigma} \nabla_\rho \partial^\mu \omega + \partial_\sigma \omega \delta^\mu_\rho \partial_\nu \omega \\
&\quad - \partial_\sigma \omega g_{\rho\nu} g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \omega - g_{\nu\sigma} \delta^\mu_\rho g^{\lambda\alpha} \partial_\lambda \omega \partial_\alpha \omega] - (\rho \leftrightarrow \sigma).
\end{aligned}$$

Expandindo a assimetria e combinando os termos, vemos

$$\begin{aligned}
\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= [\delta^\mu_\sigma \nabla_\rho \partial_\nu \omega - g_{\nu\sigma} g^{\mu\alpha} \nabla_\rho \partial_\alpha \omega + \partial_\sigma \omega \delta^\mu_\rho \partial_\nu \omega \\
&\quad - \partial_\sigma \omega g_{\rho\nu} g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \omega - g_{\nu\sigma} \delta^\mu_\rho g^{\lambda\alpha} \partial_\lambda \omega \partial_\alpha \omega] - (\rho \leftrightarrow \sigma).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]} &= [\delta^\mu_\sigma \nabla_\rho \nabla_\nu \omega - g_{\nu\sigma} g^{\mu\alpha} \nabla_\rho \nabla_\alpha \omega + \nabla_\sigma \omega \delta^\mu_\rho \nabla_\nu \omega \\
&\quad - \nabla_\sigma \omega g_{\rho\nu} g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \omega - g_{\nu\sigma} \delta^\mu_\rho g^{\lambda\alpha} \nabla_\lambda \omega \nabla_\alpha \omega] - (\rho \leftrightarrow \sigma).
\end{aligned}$$

Agora, temos tudo o que precisamos para calcular o tensor de curvatura conforme:

$$\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} = R^\mu_{\nu\rho\sigma} + \Theta^\mu_{\nu[\rho\sigma]} + \Psi^\mu_{\nu[\rho\sigma]}.$$

Então, substituímos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^\mu_{\nu\rho\sigma} &= R^\mu_{\nu\rho\sigma} + \delta^\mu_\sigma \nabla_\rho \nabla_\nu \omega - g_{\nu\sigma} g^{\mu\alpha} \nabla_\rho \nabla_\alpha \omega + \nabla_\sigma \omega \delta^\mu_\rho \nabla_\nu \omega \\
&\quad - \nabla_\sigma \omega g_{\rho\nu} g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha \omega - g_{\nu\sigma} \delta^\mu_\rho g^{\lambda\alpha} \nabla_\lambda \omega \nabla_\alpha \omega - (\rho \leftrightarrow \sigma)
\end{aligned}$$

e expandimos o fator antissimétrico $(\rho \leftrightarrow \sigma)$. Reorganizamos a expressão, de maneira que

os pares fiquem lado a lado, veja:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} &= R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + \delta^{\mu}_{\sigma}\nabla_{\rho}\nabla_{\nu}\omega - \delta^{\mu}_{\rho}\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\omega - g^{\mu\alpha}g_{\nu\sigma}\nabla_{\rho}\nabla_{\alpha}\omega + g^{\mu\alpha}g_{\nu\rho}\nabla_{\sigma}\nabla_{\alpha}\omega \\
&+ \delta^{\mu}_{\rho}\nabla_{\sigma}\omega\nabla_{\nu}\omega - \delta^{\mu}_{\sigma}\nabla_{\rho}\omega\nabla_{\nu}\omega \\
&- \nabla_{\sigma}\omega g_{\rho\nu}g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\omega + \nabla_{\rho}\omega g_{\sigma\nu}g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\omega \\
&- g_{\nu\sigma}\delta^{\mu}_{\rho}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\omega\nabla_{\alpha}\omega + g_{\nu\rho}\delta^{\mu}_{\sigma}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\omega\nabla_{\alpha}\omega,
\end{aligned}$$

já que conhecemos a definição de antissimetria $2\delta^{\mu}_{[\sigma}\nabla_{\rho]}\nabla_{\nu}\omega = \delta^{\mu}_{\sigma}\nabla_{\rho}\nabla_{\nu}\omega - \delta^{\mu}_{\rho}\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\omega$, aplicamos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} &= R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} + 2\delta^{\mu}_{[\sigma}\nabla_{\rho]}\nabla_{\nu}\omega - 2g^{\mu\alpha}g_{\nu[\sigma}\nabla_{\rho]}\nabla_{\alpha}\omega + 2\nabla_{[\sigma}\omega\delta^{\mu}_{\rho]}\nabla_{\nu}\omega \\
&- 2\nabla_{[\sigma}\omega g_{\rho]\nu}g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\omega - 2g_{\nu[\sigma}\delta^{\mu}_{\rho]}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\omega\nabla_{\alpha}\omega.
\end{aligned}$$

Neste sentido, fazemos $\rho = \mu$, para obter o tensor de Ricci conforme, e expandimos:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{\mu}_{\nu\mu\sigma} &= R^{\mu}_{\nu\mu\sigma} + \delta^{\mu}_{\sigma}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\omega - \delta^{\mu}_{\mu}\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\omega - g^{\mu\alpha}g_{\nu\sigma}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\omega + g^{\mu\alpha}g_{\nu\mu}\nabla_{\sigma}\nabla_{\alpha}\omega \\
&+ \nabla_{\sigma}\omega\delta^{\mu}_{\mu}\nabla_{\nu}\omega - \nabla_{\mu}\omega\delta^{\mu}_{\sigma}\nabla_{\nu}\omega \\
&- \nabla_{\sigma}\omega g_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\omega + \nabla_{\mu}\omega g_{\sigma\nu}g^{\mu\alpha}\nabla_{\alpha}\omega - \\
&g_{\nu\sigma}\delta^{\mu}_{\mu}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\omega\nabla_{\alpha}\omega + g_{\nu\mu}\delta^{\mu}_{\sigma}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\omega\nabla_{\alpha}\omega
\end{aligned}$$

e contraímos onde seja possível. Juntamos os mesmos termos:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\nu\sigma} &= R_{\nu\sigma} + 2\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\omega - n\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\omega - g^{\mu\alpha}g_{\nu\sigma}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\omega + n\nabla_{\sigma}\omega\nabla_{\nu}\omega - 2\nabla_{\sigma}\omega\nabla_{\nu}\omega \\
&- ng_{\nu\sigma}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\omega\nabla_{\alpha}\omega + 2g_{\nu\sigma}g^{\mu\alpha}\nabla_{\mu}\omega\nabla_{\alpha}\omega.
\end{aligned}$$

Finalmente chegamos na Eq. (D.8) da Ref. (Wald, 1984):

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\nu\sigma} &= R_{\nu\sigma} - (n-2)\nabla_{\sigma}\nabla_{\nu}\omega - g_{\nu\sigma}g^{\mu\alpha}\nabla_{\mu}\nabla_{\alpha}\omega \\
&+ (n-2)\nabla_{\sigma}\omega\nabla_{\nu}\omega - (n-2)g_{\nu\sigma}g^{\lambda\alpha}\nabla_{\lambda}\omega\nabla_{\alpha}\omega.
\end{aligned}$$

Daí, contraímos tal resultado com $\tilde{g}^{\sigma\nu} = \Omega^{-2}g^{\sigma\nu}$, colocamos Ω^2 em evidência e lembramos

que $\delta^\nu_\nu = n$, resultando em

$$\begin{aligned}\tilde{R} = \Omega^{-2} [R - (n - 2) g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \nabla_\nu \omega - n g^{\mu\alpha} \nabla_\mu \nabla_\alpha \omega + (n - 2) g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \omega \nabla_\nu \omega \\ - (n - 2) n g^{\lambda\alpha} \nabla_\lambda \omega \nabla_\alpha \omega],\end{aligned}$$

agora aplicamos a propriedade distributiva no último termo, juntamos os termos que contém $g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \nabla_\nu \omega$ e também os que contém $g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \omega \nabla_\nu \omega$:

$$\begin{aligned}\tilde{R} = \Omega^{-2} [R - (2n - 2) g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \nabla_\nu \omega \\ - (n^2 - 3n + 2) g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \omega \nabla_\nu \omega].\end{aligned}$$

Conhecendo a fatoração $(n - 2)(n - 1) = n^2 - n - 2n + 2 = n^2 - 3n + 2$, então temos finalmente a Eq. (D.9) do Apêndice da Ref. (Wald, 1984):

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} [R - 2(n - 1) g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \nabla_\nu \omega - (n - 2)(n - 1) g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \omega \nabla_\nu \omega].$$

Em 4D, $n = 4$, temos

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} [R - 6g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \nabla_\nu \omega - 6g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \omega \nabla_\nu \omega]. \quad (\text{C.3})$$

Para conseguirmos o resultado em termos de \tilde{g} , iremos fazer a transformação:

$$A_\nu \equiv \partial_\nu \omega = \nabla_\nu \omega = \tilde{\partial}_\nu \omega = \tilde{\nabla}_\nu \omega. \quad (\text{C.4})$$

Relembre que

$$\tilde{\nabla}_\sigma A_\nu = \tilde{\partial}_\sigma A_\nu - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} A_\lambda,$$

onde $\tilde{\partial}_\sigma = \partial_\sigma$ (uma vez que as coordenadas não são diretamente afetadas pelas transformações conformes do tensor métrico). Além disso,

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\sigma\nu} = \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + \Delta^\lambda_{\sigma\nu}$$

então:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_\sigma A_\nu &= \partial_\sigma A_\nu - (\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} + \Delta^\lambda_{\sigma\nu}) A_\lambda \\
&= \nabla_\sigma A_\nu - (\delta^\lambda_{(\sigma} \partial_{\nu)} \omega - g_{\sigma\nu} \partial^\lambda \omega) A_\lambda \\
&= \nabla_\sigma A_\nu - \delta^\lambda_{\sigma} \partial_{\nu} \omega A_\lambda - \delta^\lambda_{\nu} \partial_{\sigma} \omega A_\lambda + g_{\sigma\nu} \partial^\lambda \omega A_\lambda.
\end{aligned}$$

Utilizaremos a Eq. (C.4):

$$\nabla_\sigma \nabla_\nu \omega = \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \omega + 2\partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega - g_{\sigma\nu} \partial^\lambda \omega \partial_\lambda \omega.$$

Isto será substituído na Eq. (C.3):

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \Omega^{-2} [R - 6g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \nabla_\nu \omega - 6g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \omega \nabla_\nu \omega] \\
&= \Omega^{-2} [R - 6g^{\sigma\nu} \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \omega - 12g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega + 6g^{\sigma\nu} g_{\sigma\nu} \partial^\lambda \omega \partial_\lambda \omega - 6g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega].
\end{aligned}$$

Seja a transformação conforme, dada na Eq. (C.1), temos

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \Omega^{-2} [R - 6\Omega^2 \tilde{g}^{\sigma\nu} \tilde{\nabla}_\sigma \tilde{\nabla}_\nu \omega - 18g^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega + 6\delta^\sigma_{\sigma} \partial^\lambda \omega \partial_\lambda \omega] \\
&= \Omega^{-2} [R - 6\Omega^2 \tilde{\square} \omega - 18\Omega^2 \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega + 24(g^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \omega)(\delta^\nu_{\lambda} \partial_\nu \omega)] \\
&= \Omega^{-2} [R - 6\Omega^2 \tilde{\square} \omega - 18\Omega^2 \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega + 24\Omega^2 \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega],
\end{aligned}$$

assim

$$\boxed{\tilde{R} = \Omega^{-2} [R - 6\Omega^2 \tilde{\square} \omega + 6\Omega^2 \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega]}.$$

Podemos deixar o resultado em termos do escalar de Ricci sem transformação conforme, veja:

$$\Omega^2 \tilde{R} = R - 6\Omega^2 \tilde{\square} \omega + 6\Omega^2 \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega$$

i.e.

$$R = \Omega^2 \tilde{R} + 6\Omega^2 \tilde{\square} \omega - 6\Omega^2 \tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega$$

ou

$$\boxed{R = \Omega^2 [\tilde{R} + 6\tilde{\square} \omega - 6\tilde{g}^{\sigma\nu} \partial_\sigma \omega \partial_\nu \omega]} \tag{C.5}$$

Esse resultado será de extrema importância nos Capítulos 4 e 5.

RAIZ QUADRADA DO DETERMINANTE DA MÉTRICA $g_{\mu\nu}$

Iremos trabalhar na relação que envolve a raiz quadrada do determinante negativo da métrica $g_{\mu\nu}$ com e sem til. Genericamente, temos uma matriz

$$(\tilde{a}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \Omega^2 a_{11} & \Omega^2 a_{12} & \Omega^2 a_{13} & \Omega^2 a_{14} \\ \Omega^2 a_{21} & \Omega^2 a_{22} & \Omega^2 a_{23} & \Omega^2 a_{24} \\ \Omega^2 a_{31} & \Omega^2 a_{32} & \Omega^2 a_{33} & \Omega^2 a_{34} \\ \Omega^2 a_{41} & \Omega^2 a_{42} & \Omega^2 a_{43} & \Omega^2 a_{44} \end{pmatrix}$$

e seu determinante, que pode ser efetuado pelo método de cofatores

$$\begin{aligned} \det(\tilde{a}_{\mu\nu}) &= (-1)^{1+1} (\Omega^2 a_{11}) \begin{vmatrix} \Omega^2 a_{22} & \Omega^2 a_{23} & \Omega^2 a_{24} \\ \Omega^2 a_{32} & \Omega^2 a_{33} & \Omega^2 a_{34} \\ \Omega^2 a_{42} & \Omega^2 a_{43} & \Omega^2 a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{1+2} (\Omega^2 a_{12}) \begin{vmatrix} \Omega^2 a_{21} & \Omega^2 a_{23} & \Omega^2 a_{24} \\ \Omega^2 a_{31} & \Omega^2 a_{33} & \Omega^2 a_{34} \\ \Omega^2 a_{41} & \Omega^2 a_{43} & \Omega^2 a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{1+3} (\Omega^2 a_{13}) \begin{vmatrix} \Omega^2 a_{21} & \Omega^2 a_{22} & \Omega^2 a_{24} \\ \Omega^2 a_{31} & \Omega^2 a_{32} & \Omega^2 a_{34} \\ \Omega^2 a_{41} & \Omega^2 a_{42} & \Omega^2 a_{44} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{1+4} (\Omega^2 a_{14}) \begin{vmatrix} \Omega^2 a_{21} & \Omega^2 a_{22} & \Omega^2 a_{23} \\ \Omega^2 a_{31} & \Omega^2 a_{32} & \Omega^2 a_{33} \\ \Omega^2 a_{41} & \Omega^2 a_{42} & \Omega^2 a_{43} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Para resolver os determinantes 3×3 , que aparecem no resultado acima, aplicamos a regra de Sarrus. Após isto, multiplicamos os Ω^2 e os colocamos em evidência, daí

$$\begin{aligned}\tilde{a} = & \Omega^8 (-1)^{1+1} (a_{11}) [(a_{22}a_{33}a_{44}) + (a_{23}a_{34}a_{42}) + (a_{24}a_{32}a_{43}) \\ & - (a_{23}a_{32}a_{44}) - (a_{22}a_{34}a_{43}) - (a_{24}a_{33}a_{42})] \\ & + \Omega^8 (-1)^{1+2} (a_{12}) [(a_{21}a_{33}a_{44}) + (a_{23}a_{34}a_{41}) + (a_{24}a_{31}a_{43}) \\ & - (a_{23}a_{31}a_{44}) - (a_{21}a_{34}a_{43}) - (a_{24}a_{33}a_{41})] \\ & + \Omega^8 (-1)^{1+3} (a_{13}) [(a_{21}a_{32}a_{44}) + (a_{22}a_{34}a_{41}) + (a_{24}a_{31}a_{42}) \\ & - (a_{22}a_{31}a_{44}) - (a_{21}a_{34}a_{42}) - (a_{24}a_{32}a_{41})] \\ & + \Omega^8 (-1)^{1+4} (a_{14}) [(a_{21}a_{32}a_{43}) + (a_{22}a_{33}a_{41}) + (a_{23}a_{31}a_{42}) \\ & - (a_{22}a_{31}a_{43}) - (a_{21}a_{33}a_{42}) - (a_{23}a_{32}a_{41})]\end{aligned}$$

colocamos Ω^8 em evidência e voltamos a escrever em forma de determinante todas essas multiplicações e somas para que fique evidente a relação de igualdade da transformação conforme. Portanto,

$$\tilde{a} = \Omega^8 \begin{vmatrix} \Omega^2 a_{11} & \Omega^2 a_{12} & \Omega^2 a_{13} & \Omega^2 a_{14} \\ \Omega^2 a_{21} & \Omega^2 a_{22} & \Omega^2 a_{23} & \Omega^2 a_{24} \\ \Omega^2 a_{31} & \Omega^2 a_{32} & \Omega^2 a_{33} & \Omega^2 a_{34} \\ \Omega^2 a_{41} & \Omega^2 a_{42} & \Omega^2 a_{43} & \Omega^2 a_{44} \end{vmatrix}.$$

Já que $a = \det(g_{\mu\nu})$, temos

$$\tilde{a} = \Omega^8 a.$$

Multiplicando ambos os lados por -1 e aplicando a raiz quadrada também, concluímos:

Finalmente,

$$\boxed{\sqrt{-\tilde{a}} = \Omega^4 \sqrt{-a} \quad \text{com } (a_{\mu\nu}) = (a_{\mu\nu})_{4 \times 4}}.$$

D'ALEMBERTIANO CONFORME

Nessa seção, fazemos a demonstração de $\tilde{\square}\omega$. Sabemos que $\tilde{\square}\omega = \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \omega$ e também $\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \omega = \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\nu \omega$, por isso podemos realizar

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \omega = \partial_\nu \partial^\nu \omega + \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\nu \partial^\lambda \omega .$$

É possível escrever $\nabla = \partial$, pois os operadores estão primeiramente atuando em um escalar e lembramos que $\tilde{\partial}_\mu = \partial_\mu$. Dito isto, expandimos o símbolo de Christoffel em sua definição:

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (\partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda})$$

e substituímos no d'Alembertiano

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \omega &= \partial_\nu \partial^\nu \omega + \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (\partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \partial^\lambda \omega \\ &= \partial_\nu \partial^\nu \omega + \left(\frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \partial_\sigma g_{\nu\lambda} \right) \partial^\lambda \omega \\ &= \partial_\nu \partial^\nu \omega + \left(\frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \partial_\lambda g_{\sigma\nu} + \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \partial_\nu g_{\sigma\lambda} \right) \partial^\lambda \omega \\ &= \partial_\nu \partial^\nu \omega + \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \partial_\lambda g_{\sigma\nu} \partial^\lambda \omega. \end{aligned}$$

Como foi demonstrado na Eq. (A.27) vemos $\partial_\rho \sqrt{-\tilde{g}} = \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu}$. Então,

$$\frac{\partial_\rho \sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-\tilde{g}}} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu}.$$

Portanto

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \omega = \partial_\nu \partial^\nu \omega + \frac{\partial_\lambda \sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial^\lambda \omega = \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\nu \partial^\nu \omega + \frac{\partial_\lambda \sqrt{-\tilde{g}}}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial^\lambda \omega$$

e colocamos $\sqrt{-\tilde{g}}$ em evidência e realocamos para o lado esquerdo da igualdade e obtemos

$$\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \omega = \sqrt{-\tilde{g}} \partial_\nu \partial^\nu \omega + \partial_\nu \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega.$$

Para finalizar, analisando a regra do produto no primeiro termo à direita da igual-

dade:

$$\partial_\nu (\sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega) = \partial_\nu \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega + \sqrt{-\tilde{g}} \partial_\nu \partial^\nu \omega \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} \partial_\nu \partial^\nu \omega = \partial_\nu (\sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega) - \partial_\nu \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega,$$

temos

$$\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}^\nu \omega = \partial_\nu (\sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega) - \partial_\nu \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega + \partial_\nu \sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega,$$

finalmente

$$\boxed{\tilde{\square} \omega = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\nu (\sqrt{-\tilde{g}} \partial^\nu \omega)}.$$

APÊNDICE D – EXTENSÃO CÚBICA DO MODELO DE STAROBINSKY

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO RELACIONADA AO TENSOR MÉTRICO

As equações de campo são deduzidas quando aplicamos o princípio da mínima ação em (5.18) variando-a em função do tensor métrico $\tilde{g}_{\mu\nu}$. A execução deste procedimento para o tensor métrico produz:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \delta_{\tilde{g}} \left\{ \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right\} \right\} = 0 \\ &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \left\{ \left(\delta_{\tilde{g}} \sqrt{-\tilde{g}} \right) \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-\tilde{g}} \delta_{\tilde{g}} \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right\} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Com a ciência da relação dada na Eq. (A.27) escrevemos

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{g}} S &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{-\tilde{g}} \left[\delta_{\tilde{g}} \tilde{R} - \frac{3}{2} (\delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu}) \tilde{\nabla}_\mu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \Phi \right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Para prosseguirmos precisamos relembrar da definição do escalar de Ricci sendo $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, então fazemos

$$\delta_{\tilde{g}} \tilde{R} = \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{R}_{\mu\nu}.$$

Assim, quando substituimos essa relação na Eq. (D.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\delta_g S &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-\tilde{g}} \left(\delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{3}{2} (\delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu}) \tilde{\nabla}_\mu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \Phi \right) \right\} \\
&= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} - \frac{3}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{-\tilde{g}} \left[\delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{3}{2} (\delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu}) \tilde{\nabla}_\mu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \Phi \right] \right\}. \tag{D.2}
\end{aligned}$$

Agora estudamos cada integral separadamente. Dado o Apêndice A, sabemos que o termo que envolve a identidade de Palatini $\delta \tilde{R}_{\sigma\nu} = \tilde{\nabla}_\rho \delta \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\rho - \tilde{\nabla}_\nu \delta \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\rho$ resulta em zero

$$\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{R}_{\mu\nu} = 0.$$

então, a Eq. (D.2) será

$$\begin{aligned}
\delta_g S &= \left\{ \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} - \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \frac{3}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \sqrt{-\tilde{g}} (\delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu}) \tilde{\nabla}_\mu \Phi \tilde{\nabla}_\nu \Phi \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Precisamos colocar o termo $\delta_g \tilde{g}^{\mu\nu}$ escrito como $\delta_g \tilde{g}_{\mu\nu}$ para que ele fique em evidência na variação da ação acima. Para isso acontecer, utilizamos a ortogonalidade da métrica

$$\delta_{\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} = -\tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\alpha\beta}$$

Dito isso, escrevemos

$$\begin{aligned}
\delta_{\tilde{g}} S &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} - \frac{3}{2} \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \sqrt{-\tilde{g}} (\tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \delta_{\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu}) \tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi \right\} = 0
\end{aligned}$$

e finalmente colocamos em evidência $\delta_g \tilde{g}_{\mu\nu}$ e também $\sqrt{-\tilde{g}}$

$$\begin{aligned}
\delta_g S &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R} - \frac{3}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_\rho \Phi \tilde{\nabla}^\rho \Phi + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \right. \\
&\quad \left. - \tilde{g}^{\alpha\mu} \tilde{g}^{\beta\nu} \tilde{R}_{\alpha\beta} + \frac{3}{2} \tilde{g}^{\mu\alpha} \tilde{g}^{\nu\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \Phi \tilde{\nabla}_\beta \Phi \right\} \times \delta_g \tilde{g}_{\mu\nu} = 0.
\end{aligned}$$

Já que na integral do hipervolume $\delta_{\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu} \neq 0$ e $\sqrt{-\tilde{g}}$ faz parte do invariante de escala, então para que a ação seja extrema, a variação deve desaparecer para qualquer que seja $\delta_{\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}$. A condição citada somente acontece quando

$$\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R} - \frac{3}{2}\tilde{g}^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{\rho}\Phi\tilde{\nabla}^{\rho}\Phi + \mathcal{V}(\Phi,\chi) \right] - \tilde{R}^{\mu\nu} + \frac{3}{2}\tilde{\nabla}^{\mu}\Phi\tilde{\nabla}^{\nu}\Phi = 0$$

então isolamos os termos de curvatura em um dos lados da igualdade

$$\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R} - \tilde{R}^{\mu\nu} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_{\rho}\Phi\tilde{\nabla}^{\rho}\Phi + \tilde{g}^{\mu\nu}\mathcal{V}(\Phi,\chi) - \tilde{\nabla}^{\mu}\Phi\tilde{\nabla}^{\nu}\Phi \right].$$

Quando multiplicamos por -1 , recaímos na equação de movimento de Einstein

$$\tilde{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R} = \frac{3}{2} \left[\tilde{\nabla}^{\mu}\Phi\tilde{\nabla}^{\nu}\Phi - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_{\rho}\Phi\tilde{\nabla}^{\rho}\Phi - \tilde{g}^{\mu\nu}\mathcal{V}(\Phi,\chi) \right]$$

onde podemos definir

$$\frac{1}{M_{\text{Pl}}^2}\bar{T}^{\mu\nu(\text{eff})} = \frac{3}{2} \left[\tilde{\nabla}^{\mu}\Phi\tilde{\nabla}^{\nu}\Phi - \tilde{g}^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{\rho}\Phi\tilde{\nabla}^{\rho}\Phi - \mathcal{V}(\Phi,\chi) \right) \right]$$

sendo o tensor energia-momento efetivo deste modelo e consistente com a Eq. (7) do artigo (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022; Stelle, 1977) que trabalha um modelo inflacionário que inclui R^3 .

EQUAÇÃO DE MOVIMENTO RELACIONADA AO CAMPO ESCALAR

Agora variamos a ação (5.18) com respeito ao campo Φ , veja

$$\delta_{\Phi}S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \delta_{\Phi} \left\{ \tilde{R} - 3 \left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{\nu}\Phi\tilde{\nabla}^{\nu}\Phi + \mathcal{V}(\Phi,\chi) \right] \right\}$$

e voltamos para a configuração onde a integração está em evidência

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi}S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\delta_{\Phi}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{R} - \frac{3}{2}\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\delta_{\Phi}\tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_{\rho}\Phi\tilde{\nabla}^{\rho}\Phi + \mathcal{V}(\Phi,\chi) \right] \right. \\ \left. + \sqrt{-\tilde{g}}\delta_{\Phi}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\sqrt{-\tilde{g}}(\delta_{\Phi}\tilde{g}^{\mu\nu})\tilde{\nabla}_{\mu}\Phi\tilde{\nabla}_{\nu}\Phi \right\} = 0. \end{aligned}$$

mas reescrevemos a parte cinética na forma

$$\tilde{\nabla}_\nu \Phi \tilde{\nabla}^\nu \Phi = \tilde{g}^{\sigma\nu} \tilde{\partial}_\sigma \Phi \tilde{\partial}_\nu \Phi$$

e escrevemos

$$\begin{aligned} \delta_\Phi S &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} (-3) \delta_\Phi \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{\sigma\nu} \left(\tilde{\partial}_\sigma \Phi \tilde{\partial}_\nu \Phi \right) + \mathcal{V}(\Phi, \chi) \right] \\ &= -\frac{3M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \frac{1}{2} \tilde{g}^{\sigma\nu} \left[\left(\tilde{\partial}_\sigma \delta_\Phi \Phi \right) \tilde{\partial}_\nu \Phi + \tilde{\partial}_\sigma \Phi \left(\tilde{\partial}_\nu \delta_\Phi \Phi \right) \right] + \frac{\partial \mathcal{V}(\Phi, \chi)}{\partial \Phi} \delta_\Phi \Phi \right\}. \end{aligned}$$

Este processo é análogo ao que já foi realizado na Subseção 3.3 e o resultado é

$$\boxed{\tilde{\square} \Phi = V_\Phi}.$$

Esse resultado será apresentado na Seção 5.2.

NÚMERO DE *E-FOLDS* ADIMENSIONAIS

Neste apêndice, vamos deduzir a função que descreve o número de *e-folds*, sem, no entanto, utilizarmos as unidades de Planck. Inicialmente definimos

$$\phi \equiv M_{\text{Pl}} \bar{\phi} \tag{D.3}$$

e

$$\dot{\phi} \equiv M_{\text{Pl}} \dot{\bar{\phi}} \tag{D.4}$$

para a derivada temporal. Conforme a Eq. (11) da Ref. (Cuzinatto; Medeiros; Pompeia, 2019) para a equação de Friedmann, temos

$$H^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \tag{D.5}$$

daí, substituindo as Eqs. (D.3) e (D.4) na Eq. (D.5):

$$H^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} M_{\text{Pl}}^2 \dot{\bar{\phi}}^2 + V(M_{\text{Pl}} \bar{\phi}) \right].$$

No regime de *slow-roll*, o termo cinético é muito menor que o termo potencial. Portanto, podemos aproximar:

$$H^2 \approx \frac{1}{2} V (M_{\text{Pl}} \bar{\phi}). \quad (\text{D.6})$$

Além disso, para descrição da dinâmica, precisamos da equação de movimento do campo escalar no regime de *slow-roll*:

$$3H\dot{\bar{\phi}} \approx -\frac{dV}{d\bar{\phi}}$$

e isolando dt :

$$dt = -\frac{3H}{\frac{dV}{d\bar{\phi}}} d\bar{\phi} \quad (\text{D.7})$$

para substituir em

$$N = \int H dt.$$

Então, substituindo as Eqs. (D.6) e (D.7) na expressão acima, vemos:

$$N = -\frac{3}{2} \int \frac{V (M_{\text{Pl}} \bar{\phi})}{\frac{dV}{d\bar{\phi}}} d\bar{\phi}. \quad (\text{D.8})$$

O parâmetro ε_V é definido como (Liddle & Lyth, 2000; Linde, 2007) ⁶²

$$\varepsilon_V \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad (\text{D.9})$$

então

$$\varepsilon_V = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{dV}{d\bar{\phi}}}{V (M_{\text{Pl}} \bar{\phi})} \right)^2.$$

O resultado acima nos permite isolar $\frac{dV}{d\bar{\phi}}$:

$$\frac{dV}{d\bar{\phi}} = V (M_{\text{Pl}} \bar{\phi}) \sqrt{2\varepsilon_V}.$$

Aplicamos esse resultado na Eq. (D.8):

$$N \approx \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_V}} |d\Phi|. \quad (\text{D.10})$$

Comentamos que o módulo do infinitesimal é necessário, pois, geralmente, no potencial *slow-roll*, o campo rola de valores maiores de ϕ e vai para valores menores de ϕ .

⁶²Confira a Eq. (4.7) da Ref. (Linde, 2007).

COMPARAÇÃO DE POTENCIAIS

Na Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022; Stelle, 1977) a ação

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{2\kappa_0} R^2 + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0^2} R^3 \right)$$

gera o seguinte potencial inflacionário:

$$V(\Phi) = \frac{\kappa_0}{72\alpha_0^2} e^{-2\Phi} \left[1 - \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} \right] \left[-1 + 8\alpha_0(1 - e^\Phi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} \right]. \quad (\text{D.11})$$

No nosso texto utilizamos a definição

$$\Phi \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}$$

enquanto no artigo que estamos nos baseando a definição é

$$\chi \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}$$

que pode ser encontrada no *Addendum* feito na segunda seção chamada de *Fields Equations*. Dito isso, vamos expandir esse potencial para que seja atingido mais facilmente quando formos transicionar entre o potencial (5.12) e a forma da Ref. (Rodrigues-da-Silva; Bezerra-Sobrinho; Medeiros, 2022; Stelle, 1977). Então fazemos

$$\begin{aligned} V(\Phi) &= \frac{\kappa_0}{72\alpha_0^2} e^{-2\Phi} \left[1 - \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} \right] \\ &\quad \times \left[-1 + 8\alpha_0(1 - e^\Phi) + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} \right] \\ &= \frac{\kappa_0}{72\alpha_0^2} e^{-2\Phi} \left\{ -2 + 2\sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} + 12\alpha_0(1 - e^\Phi) \right. \\ &\quad \left. - 8\alpha_0(1 - e^\Phi) \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} \right\} \\ &= \frac{\kappa_0}{36\alpha_0^2} e^{-2\Phi} \left\{ -1 + \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} + 6\alpha_0(1 - e^\Phi) \right. \\ &\quad \left. - 4\alpha_0(1 - e^\Phi) \sqrt{1 - 4\alpha_0(1 - e^\Phi)} \right\}. \quad (\text{D.12}) \end{aligned}$$

Com esse resultado concluímos que a expressão que encontramos na Eq. (5.32)

pode ser escrita como (D.11).

EXPANSÃO EM TAYLOR PARA OS PARÂMETROS ε e η

Sabemos que a definição do *tilt* escalar seja:

$$n_s - 1 \equiv -2\varepsilon + \eta \quad (\text{D.13})$$

pois sabemos que

$$\eta \equiv -\frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon}.$$

Substituindo

$$\varepsilon \approx \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \frac{\exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{\left[1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)\right]^2}$$

e

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \left[\frac{1 + \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)} \right]$$

temos

$$n_s - 1 \approx -2 \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \frac{\exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{\left[1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)\right]^2} + \frac{16}{3} \delta_c \left[\frac{1 + \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)} \right].$$

A partir desse resultado e conhecendo a condição $\delta_c N \ll 1$, vamos fazer a expansão em Taylor da exponencial até segunda ordem para notar as diferenças que o modelo $R + R^2 + R^3$ traz. Assim, iniciamos estudando a exponencial a seguir, que aparece em ambos os parâmetros (ε e η):

$$e^{2\Delta} \approx 1 + (2\Delta) + \frac{1}{2!} (2\Delta)^2 + \frac{1}{3!} (2\Delta)^3 + \mathcal{O}[(2\Delta)^4]$$

onde

$$\Delta \equiv \frac{8\delta_c N}{3}.$$

Na sequência, vamos trabalhar especificamente com ε :

$$\begin{aligned}\varepsilon &\approx \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \left[1 + (2\Delta) + \frac{1}{2!} (2\Delta)^2 + \frac{1}{3!} (2\Delta)^3 \right] \left\{ 1 - \left[1 + (2\Delta) + \frac{1}{2!} (2\Delta)^2 + \frac{1}{3!} (2\Delta)^3 \right] \right\}^{-2} \\ &\approx \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \left[1 + (2\Delta) + \frac{1}{2} (2\Delta)^2 + \frac{1}{6} (2\Delta)^3 \right] \left\{ [-(2\Delta)]^{-2} \left[1 + \frac{1}{2} (2\Delta) + \frac{1}{6} (2\Delta)^2 \right]^{-2} \right\}.\end{aligned}$$

A partir daqui desprezaremos termos do tipo $\mathcal{O}[(2\Delta)^3]$, já que $(2\Delta) \ll 1$. Logo,

$$\varepsilon \approx \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \left[1 + (2\Delta) + \frac{1}{2} (2\Delta)^2 \right] \left\{ \frac{[1 + \Delta + \frac{2}{3}\Delta^2]^{-2}}{(2\Delta)^2} \right\}, \quad (\text{D.14})$$

como $(2\Delta) \ll 1$, podemos usar a técnica da expansão em Taylor para escrever $[1 + \Delta + \frac{2}{3}\Delta^2]^{-2}$ em série de potência até a ordem quadrática de Δ . Genericamente,⁶³ temos:

$$[1 + \Delta + a\Delta^2]^n \approx 1 + n\Delta + [(n)(n-1) + (2n)a] \frac{\Delta^2}{2!} + \mathcal{O}[(2\Delta)^3]. \quad (\text{D.15})$$

Acima a e n são constantes e a expansão é em torno de zero. Assim, para $n = -2$ e $a = 2/3$, temos

$$\left[1 + \Delta + \frac{2}{3}\Delta^2 \right]^{-2} \approx 1 + (-2)\Delta + \left[(-2)(-2-1) + 2(-2)\frac{2}{3} \right] \frac{\Delta^2}{2!} + \mathcal{O}[(2\Delta)^3],$$

i.e.

$$\left[1 + \Delta + \frac{2}{3}\Delta^2 \right]^{-2} \approx \left[1 - (2\Delta) + \frac{5}{12} (2\Delta)^2 \right].$$

Então, substituímos esse resultado em (D.14)

$$\varepsilon \approx \frac{4^3}{3} \delta_c^2 \frac{1}{4\Delta^2} \left[1 + (2\Delta) + \frac{1}{2} (2\Delta)^2 \right] \left[1 - (2\Delta) + \frac{5}{12} (2\Delta)^2 \right],$$

e fazemos a distributiva no termo entre chaves e cancelando o fator 4 do denominador, obtendo:

$$\varepsilon \approx \frac{4^2}{3} \delta_c^2 \frac{1}{\Delta^2} \left\{ 1 + \frac{5}{12} (2\Delta)^2 - (2\Delta)^2 + \frac{5}{12} (2\Delta)^3 + \frac{1}{2} (2\Delta)^2 - \frac{1}{2} (2\Delta)^3 + \frac{5}{24} (2\Delta)^4 \right\}. \quad (\text{D.16})$$

Desprezaremos os termos cúbicos e quártico em (2Δ) nas chaves por consistência com as

⁶³Para chegar na forma genérica, utilizamos a expansão $(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, para $x = \Delta + a\Delta^2$ e realizamos a álgebra necessária, indo até ordem Δ^2 .

aproximações anteriores. Assim,

$$\varepsilon \approx \frac{4^2}{3} \delta_c^2 \frac{1}{\Delta^2} \left\{ 1 + \left(\frac{5}{12} - 1 + \frac{1}{2} \right) (2\Delta)^2 \right\}$$

ou

$$\varepsilon \approx \frac{4^2}{3} \delta_c^2 \frac{1}{\Delta^2} \left\{ 1 + \left(\frac{5 - 12 + 6}{12} \right) (2\Delta)^2 \right\}$$

ou ainda:

$$\varepsilon \approx \frac{4^2}{3} \delta_c^2 \frac{1}{\Delta^2} \left\{ 1 - \frac{1}{12} (2\Delta)^2 \right\}.$$

Agora substituímos Δ para obter:

$$\varepsilon \approx \frac{4^2}{3} \delta_c^2 \frac{1}{\left(\frac{8\delta_c N}{3}\right)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{12} \left[2 \left(\frac{8\delta_c N}{3} \right) \right]^2 \right\} \approx 3 \left(\frac{4\delta_c}{3} \right)^2 \frac{1}{(2N)^2 \left(\frac{4\delta_c}{3}\right)^2} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{16\delta_c N}{3} \right)^2 \right] \quad (\text{D.17})$$

logo

$$\boxed{\varepsilon \approx \frac{3}{4N^2} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{16\delta_c N}{3} \right)^2 \right]}. \quad (\text{D.18})$$

Então, partimos para o outro parâmetro: η :

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \left[\frac{1 + \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)}{1 - \exp\left(\frac{16\delta_c N}{3}\right)} \right] = \frac{16}{3} \delta_c \left[\frac{1 + \exp(2\Delta)}{1 - \exp(2\Delta)} \right]$$

com

$$\Delta \equiv \frac{8\delta_c N}{3} \ll 1$$

e novamente

$$e^{2\Delta} \approx 1 + (2\Delta) + \frac{1}{2!} (2\Delta)^2 + \frac{1}{3!} (2\Delta)^3 + \mathcal{O}[(2\Delta)^4].$$

Por isso, fazemos

$$\begin{aligned} \eta &\approx \frac{16}{3} \delta_c \left[\frac{1 + 1 + (2\Delta) + \frac{1}{2!} (2\Delta)^2 + \frac{1}{3!} (2\Delta)^3}{1 - 1 - (2\Delta) - \frac{1}{2!} (2\Delta)^2 - \frac{1}{3!} (2\Delta)^3} \right] \\ &\approx \frac{16}{3} \delta_c \left\{ \frac{2 \left[1 + \Delta + \Delta^2 + \frac{2}{3} \Delta^3 \right]}{-(2\Delta)} \left[1 + \Delta + \frac{2}{3} \Delta^2 \right]^{-1} \right\}, \end{aligned}$$

cancelando o fator 2 na fração dentro das chaves e negligenciando o termo de $\mathcal{O}(\Delta^3)$,

ficamos com

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \left\{ \frac{[1 + \Delta + \Delta^2]}{-\Delta} \left[1 + \Delta + \frac{2}{3} \Delta^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (\text{D.19})$$

Nesse momento, lembramos da expansão em Taylor (D.15), mas agora para $a = 2/3$ e $n = -1$, tal que

$$\left[1 + \Delta + \frac{2}{3} \Delta^2 \right]^{-1} \approx 1 + (-1) \Delta + \left[(-1)(-1-1) + 2(-1) \frac{2}{3} \right] \frac{\Delta^2}{2}$$

i.e.

$$\left[1 + \Delta + \frac{2}{3} \Delta^2 \right]^{-1} \approx 1 - \Delta + \frac{1}{3} \Delta^2.$$

Logo, quando substituimos esse resultado em (D.19), temos

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \frac{1}{(-\Delta)} [1 + \Delta + \Delta^2] \left[1 - \Delta + \frac{1}{3} \Delta^2 \right].$$

Executando o produto dos colchetes e desprezando os termos proporcionais à Δ^3 e Δ^4 :

$$\eta \approx \frac{16}{3} \delta_c \frac{1}{(-\Delta)} \left[1 - \Delta + \frac{1}{3} \Delta^2 + \Delta - \Delta^2 + \Delta^2 \right]$$

daí reorganizamos

$$\eta \approx \frac{2}{N} \left(\frac{8\delta_c N}{3} \right) \frac{1}{(-\Delta)} \left[1 + \frac{1}{12} (2\Delta)^2 \right].$$

Substituindo Δ , temos:

$$\boxed{\eta \approx -\frac{2}{N} \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{16\delta_c N}{3} \right)^2 \right]}. \quad (\text{D.20})$$